



PENDEKATAN LINIER PROGRAMMING METODA FINITE DIFFERENCE DALAM MENGHITUNG BEBAN BATAS DARI PELAT PERSEGI

WAWAN WITARNAWAN SUKARJA

RINGKASAN

Penerapan pemograman matematis terhadap analisa batas digunakan untuk menghitung beban runtuh dari pelat-pelat bujur sangkar dan persegi yang menerima beban merata. Berbagai kombinasi kondisi perletakan pelat ditinjau dalam perhitungan ini. Hasil yang diperoleh dengan menggunakan metoda pendekatan ini cukup dekat dengan hasil-hasil lain yang sudah diterbitkan.

SUMMARY

The application of Mathematical Programming to the limit analysis is used to calculate the collapse loads of square and rectangular plates under uniformly distributed pressure loading. different combinations of edge support conditions were considered. Close agreement with reported solutions are obtained in all cases.

I. PENDAHULUAN

Sebagaimana telah disebutkan pada penerbitan lalu, maka pada kesempatan ini penulis akan menjelaskan mengenai penerapan metoda pemograman linier di dalam memecahkan persoalan analisa beban batas dari struktur pelat persegi isotropis yang diberi beban merata serta beban terpusat pada berbagai kondisi perletakan. Mengingat teori pendekatan batas bawah (lower bound) yang dipilih, maka didalam pemograman linier ini beban atau faktor beban akan dimaksimumkan dengan batasannya adalah persamaan-persamaan keseimbangan (equilibrium) dan kelelahan (yield).

Cara central difference dipilih dalam memecahkan persamaan - persamaan keseimbangan yang non-linier dan pendekatan garis lurus terpatah (piecewise linier appoximation) digunakan untuk melinierkan permukaan leleh (yield surface) dari material.

Dengan membuat program komputernya, maka secara mudah semua persamaan- persamaan diatas dapat secara langsung

di'generate' melalui suatu program yang interactive. Sedangkan Sciconic digunakan untuk memecahkan persoalan pemograman linier-nya.

II. PERSAMAAN KESEIMBANGAN PELAT

Dengan menggunakan anggapan-anggapan yang biasa digunakan pada teori pelat tipis (seperti oleh Szilard, 1974), maka persamaan-persamaan differential dari elemen pelat (Gambar 1) dapat diturunkan sebagai berikut:

$$Q_{yz}^* = Q_{yz} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} dy \dots \dots \dots (1a)$$

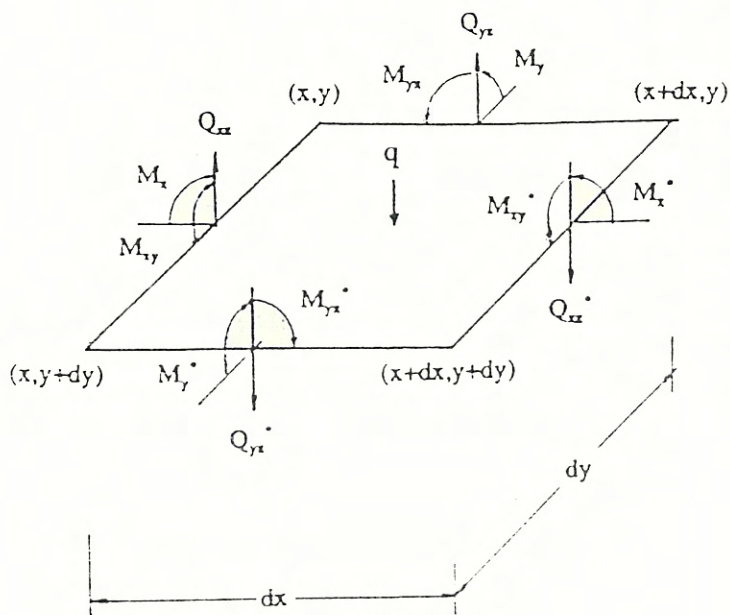
$$Q_{xz}^* = Q_{xz} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} dx \dots \dots \dots (1b)$$

$$M_y^* = M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \dots \dots \dots (1c)$$

$$M_x^* = M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \dots \dots \dots (1d)$$

$$M_{yx}^* = M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \dots \dots \dots (1e)$$

$$M_{xy}^* = M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \dots \dots \dots (1f)$$



Gambar 1. Element differential dari pelat

Dari keseimbangan gaya dan momen terhadap sumbu-sumbu x, y dan z dan dengan membuat beberapa penyederhanaannya, maka diperoleh persamaan differential sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \dots \dots (2)$$

III. Syarat-syarat batas

Sebagai mana telah dibahas pada penerbitan terdahulu (struktur balok), agar diperoleh analisa gaya-gaya pada keseluruhan struktur secara benar, maka syarat-syarat batas gaya harus dimasukkan kedalam persamaan keseimbangan. Adapun tiga macam syarat batas gaya yang biasa digunakan pada pelat adalah :

(a) Perletakan sederhana (simply supported):

$$M = 0 \dots \dots \dots (3a)$$

(b) Perletakan bebas (free supported)

$$M = 0 \dots \dots \dots (3b)$$

$$M_{xy} = 0 \dots \dots \dots (3c)$$

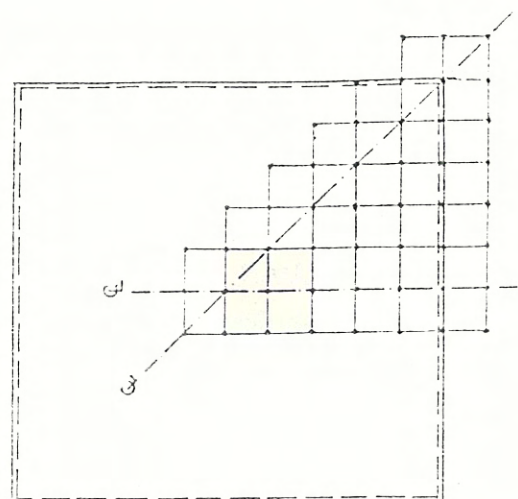
(c) Perletakan jepit (clamped) :

$$\text{Tidak ada batasan} \dots \dots \dots (3d)$$

IV. Penerapan finite difference pada persamaan keseimbangan

Untuk menerapkan finite difference pada persamaan keseimbangan, maka terlebih dahulu pelat dipolakan (discretized) kedalam titik-titik yang mempunyai jarak sama di dalam arah sumbu x dan y.

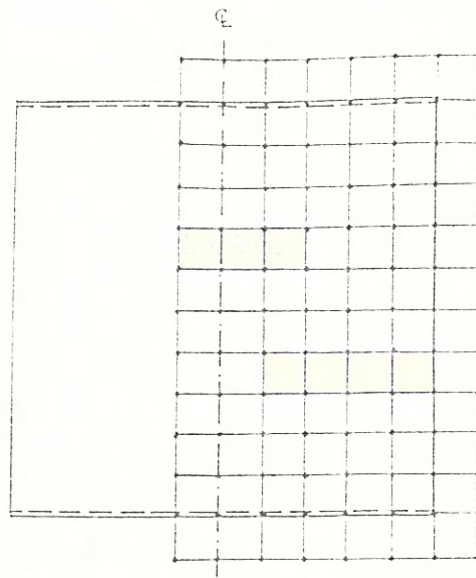
Untuk pelat - pelat yang dalam hal geometri, pembebanan dan kondisi perletakannya adalah simetris, maka cukup hanya seperdelapan bagian dari pelat dianalisa (Gambar 2). Sedangkan bila sifat simetrisnya hanya terhadap satu sumbu saja, maka hanya setengah dari pelat yang dianalisa (Gambar 3)



Gambar 2. Jaring finite difference untuk seperdelapan bagian pelat

Mengingat pada pelat momen-momen merupakan fungsi dua variabel. $M = M(x,y)$, maka konsep finite difference perlu dikembangkan agar dapat digunakan pada fungsi yang mempunyai dua variabel.

Tinjau suatu jaring (mesh) dari pelat seperti ditunjukkan pada gambar 4. Dengan menerapkan pendekatan central difference terhadap titik 5, maka persamaan keseimbangan yang berlaku pada titik 5 adalah sebagai berikut;



Gambar 3. Jaring finite difference untuk setengah bagian pelat

$$\left[\frac{M_{x4} - 2M_{x5} + M_{x6}}{h^2} \right] - 2 \left[\frac{M_{xy3} - M_{xy9} - M_{xy1} + M_{xy7}}{4h^2} \right] + \left[\frac{M_{y2} - 2M_{y5} + M_{y8}}{h^2} \right] = -q \quad \dots \dots \dots (4)$$

Dengan memperkenalkan variabel-variabel baru $a_i = M_{xi}/Mp$, $b_i = M_{yi}/Mp$, $c_i = M_{xyi}/Mp$ dan $\mu p = 2qh^2/Mp$ (μ adalah faktor beban) maka

untuk pelat yang isotropis persamaan (4) dapat ditulis dalam bentuk tanpa dimensi sebagai berikut:

$$2(a_4 - 2a_5 + a_6) + 2(b_2 - 2b_5 + b_8) - (c_3 - c_9 - c_1 + c_7) - \mu p = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

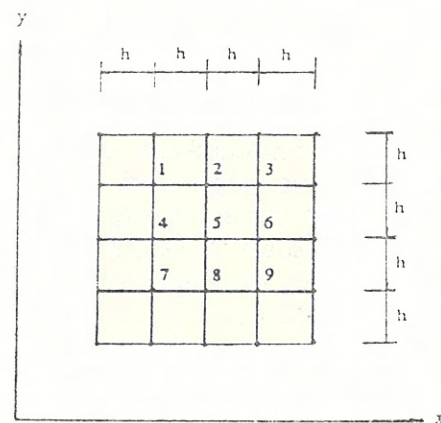
Operator finite difference yang berlaku untuk a_i , b_i dan c_i dapat dilihat pada gambar 5.

Secara umum, persamaan keseimbangan dari keseluruhan struktur dapat disajikan dalam bentuk matrix :

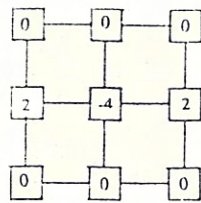
$$\underline{A} \underline{a} + \underline{B} \underline{b} - \underline{C} \underline{c} + \mu \underline{p} = \underline{0} \quad \dots \dots (6)$$

Di mana matrix-matrix $\underline{A}$, $\underline{B}$ dan $\underline{C}$ diperoleh dari (5); vektor-vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$, dan $\underline{c}$ merupakan kumpulan variabel-variabel a_i , b_i dan c_i untuk semua titik (nodes); dan $\underline{p}$ dikenal sebagai vektor beban.

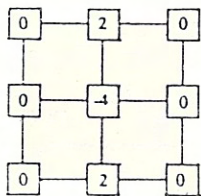
Agar supaya syarat batasan keseimbangan dipenuhi, maka syarat-syarat batas gaya dari (3) harus dimasukkan dalam (6)



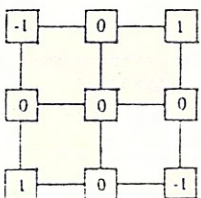
Gambar 4. Jaring dua dimensi untuk pelat



(a) a_i



(b) b_i



(c) c_i

Gambar 5. Finite difference operator

V. Contoh-contoh perhitungan

V.1 Pelat bujur sangkar

V.1.1 Beban merata

Di dalam contoh ini beban-beban runtuh (collapse loads) diperoleh dari 6 type pelat bujur sangkar ($2L \times 2L$) yang menerima beban merata (q). Berbagai kombinasi dari kondisi-kondisi perletakan ditunjukkan pada gambar 6. Kriteria leleh dari Tresca dan Johansen seperti yang dibebankan pada bagian 1 terdahulu, akan digunakan di dalam menganalisa pelat-pelat ini.

Perhitungan beban batas untuk pelat 1 akan diberikan secara detail dalam pembahasan ini. Sebagai dasar awal perhitungan, maka seperempat bagian pelat dibagi kedalam jaring finite difference ukuran 2×2 (Gambar 7). Mengingat alasan simetris, maka hanya setengah bagian pelat yang dianalisa. Pemograman linear dari

kasus ini adalah :

$$\mu_c = \max \mu \dots \dots \dots (7a)$$

dengan batasan :

syarat keseimbangan :

$$\underline{A} \underline{a} + \underline{B} \underline{b} - \underline{C} \underline{c} + \underline{\mu} \underline{p} = \underline{0} \dots \dots \dots (7b)$$

syarat batas gaya :

$$a_9, a_{14}, a_{19}, a_{24}, a_{29} = 0 \dots \dots \dots (7c)$$

$$b_7, b_8, b_9, b_{27}, b_{28}, b_{29} = 0$$

syarat simetris :

$$a_6 - a_8 = 0$$

$$a_{11} - a_{13} = 0$$

$$a_{16} - a_{18} = 0$$

$$a_{21} - a_{23} = 0$$

$$a_{26} - a_{28} = 0$$

$$c_7, c_{12}, c_{17}, c_{22}, c_{27} = 0 \dots \dots \dots (7d)$$

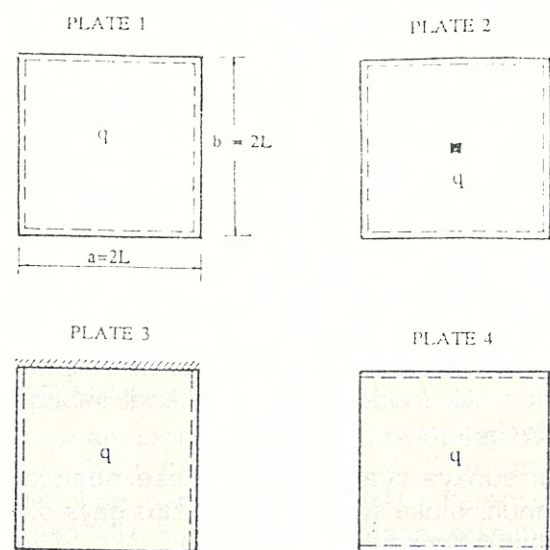
$$c_6 + c_8 = 0$$

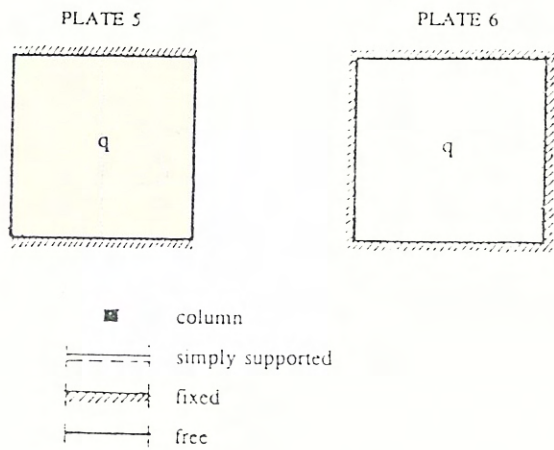
$$c_{11} + c_{13} = 0$$

$$c_{16} + c_{18} = 0$$

$$c_{21} + c_{23} = 0$$

$$c_{26} + c_{28} = 0$$





di mana :

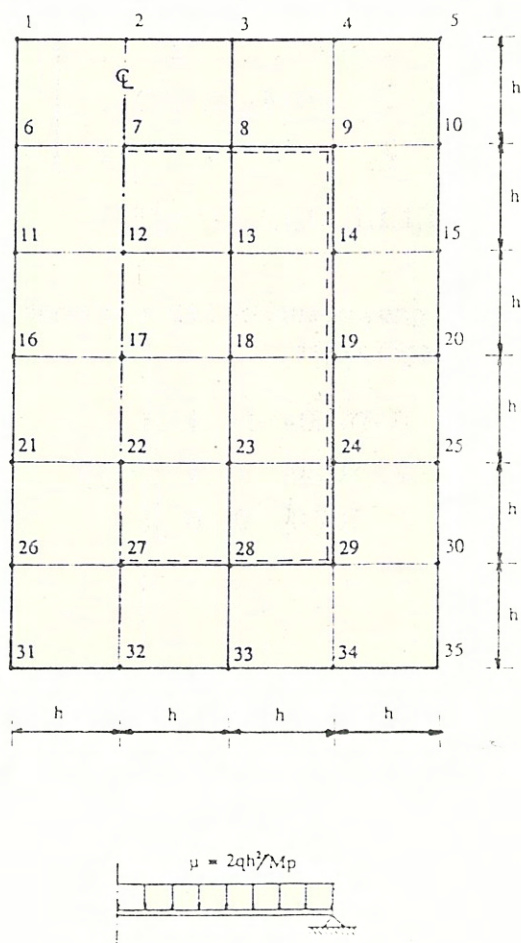
$$\underline{a}^T = [a_6, \dots, a_{30}] \quad (7f)$$

$$\underline{b}^T = [b_2, b_3, b_4, b_7, b_8, b_9, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{17}, b_{18}, b_{19}, \\ b_{22}, b_{23}, b_{24}, b_{27}, b_{28}, b_{29}, b_{32}, b_{33}, b_{34}] \quad \dots (7g)$$

$$\underline{c}^T = [c_1, \dots, c_{35}] \dots \dots \dots (7h)$$

$$p^T = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] \dots (7i)$$

Gambar 6. Enam type pelat bujur sangkar

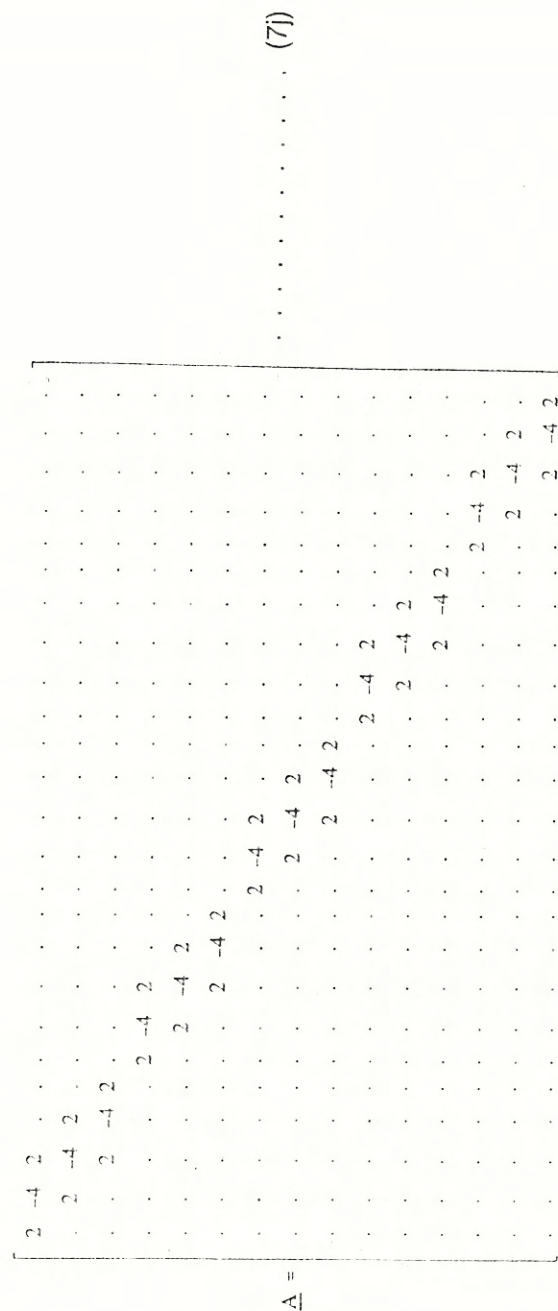


Gambar 7. Jaring ukuran 2x2 dan pembelahan merata

syarat leleh :

$$\underline{Q} - \underline{V} \underline{x} = \underline{0}, \quad \underline{x} \geq \underline{0} \dots (7e)$$

$$\underline{U}^T \underline{x} \leq \underline{1}$$



untuk kondisi leleh Tresca, Gambar 8, maka kuantitas dari (7e) dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\underline{V} = \text{diag} [\underline{V}^j]$$

$$\underline{V}^j = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (7n)$$

$$\underline{x}^T = [\dots, \underline{x}^{jT} \dots] \dots \dots \dots (7o)$$

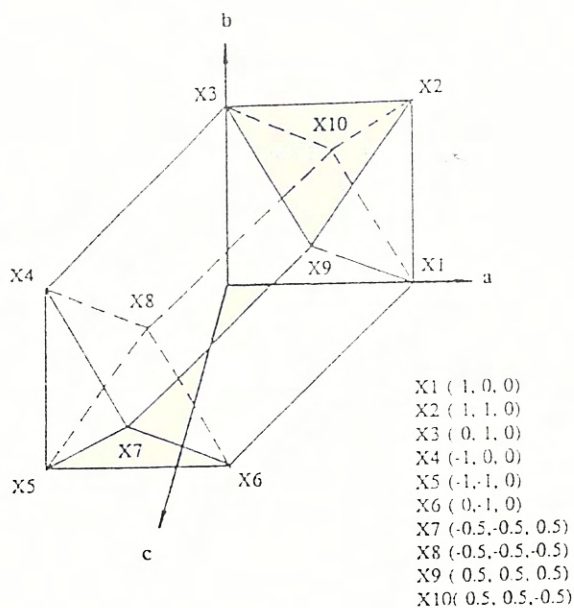
$$\underline{x}^{jT} = [X1_j, \dots, X10_j]$$

$$\underline{U}^T = \text{diag} [\underline{U}^{jT}] \dots \dots \dots (7p)$$

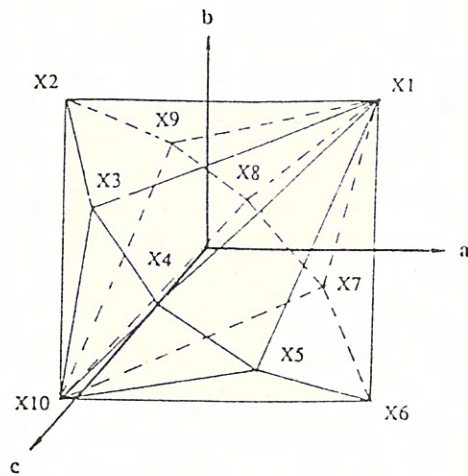
$$\underline{U}^{jT} = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Bila kriteria leleh dari Johansen yang digunakan (Gambar 9), maka komponen $\underline{V}^j$ dari (7n) dapat diganti dengan :

$$\underline{V}^j = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0.707 & 0 & 0.707 & 1 & 0.707 & 0 & -0.707 & -1 \\ 1 & 1 & 0.707 & 0 & -0.707 & -1 & -0.707 & 0 & 0.707 & -1 \\ 0 & 0 & 0.707 & 1 & 0.707 & 0 & -0.707 & -1 & -0.707 & 0 \end{bmatrix}$$



Gambar 8. linearized tresca yield surface



X1 (1, 1, 0)
 X2 (-1, 1, 0)
 X3 (-0.707, 0.707, 0.707)
 X4 (0, 0, 1)
 X5 (0.707, -0.707, 0.707)
 X6 (1, -1, 0)
 X7 (0.707, -0.707, -0.707)
 X8 (0, 0, -1)
 X9 (-0.707, 0.707, -0.707)
 X10 (-1, -1, 0)

Gambar 9. Linearized Johansen yield surface

Problema ini melibatkan 101 batasan (15 syarat keseimbangan, 11 batasan gaya, 15 syarat simetris, 60 syarat leleh) dan 232 variabel. Faktor beban runtuh $p = 0.8824$ diperoleh untuk kondisi leleh Tresca. Perlu dicatat bahwa $p = 0.333 \mu$. Harga ini 8,5% lebih kecil dari yang pernah diperoleh Koopman dan Lance's yaitu sebesar 0.964; Didalam hal ini Koopman dan Lance's (1965) membagi seperempat bagian dari pelat kedalam jaring 5×5 .

Untuk memperoleh hasil yang lebih baik, maka untuk selanjutnya seperempat bagian dari pelat dibagi kedalam jaring yang lebih halus yaitu ukuran 4×4 (Gambar 10). Faktor beban runtuh yang diperoleh dari berbagai type pelat (Gambar 6) dengan kondisi leleh dari Tresca dan Johan-

sen, dapat dilihat dari tabel 1. Untuk perbandingan, maka hasil-hasil lain yang diperoleh dari literatur juga diberikan.

V.1.2. Kombinasi beban merata dan terpusat.

Di dalam kasus ini maka pelat bujur sangkar yang ditumpu sederhana pada keempat sisinya diberi beban merata $q (= \mu Mp/2h^2)$ dan satu beban terpusat (p) yang bekerja ditengah pelat, Gambar 11. Besar beban terpusat divariasikan terhadap beban merata.

Di dalam model finite difference ini, maka beban terpusat dianggap bekerja diatas area h^2 . Bila $p = kqab$, maka beban terbagi rata ekuivalennya data ditulis sebagai,

$$w = \frac{k q a b}{h^2}$$

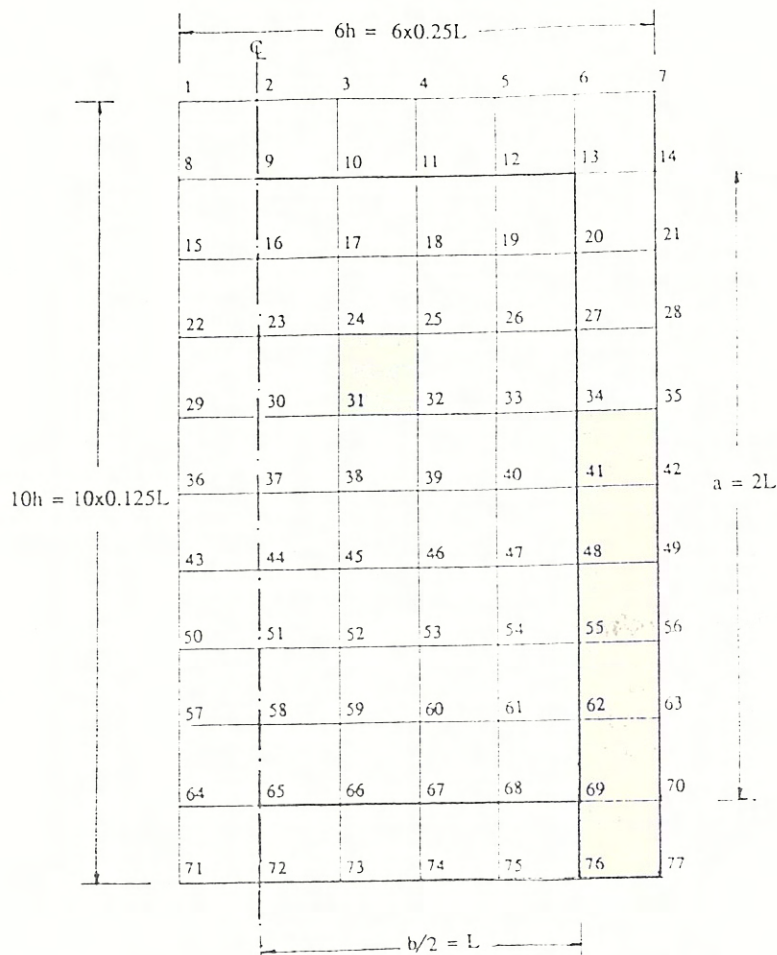
sehingga komponen beban untuk titik 37 menjadi,

$$\mu p_{37} = \frac{2 q h^2}{Mp} \left(1 + \frac{w}{q} \right)$$

dengan mensubstitusikannya (8) ke (9), maka

$$\mu p_{37} = \mu \left(1 + \frac{k a b}{h^2} \right)$$

$$\mu = 2qh^2/Mp.$$



Gambar 10. Jaring finite difference ukuran 4x4

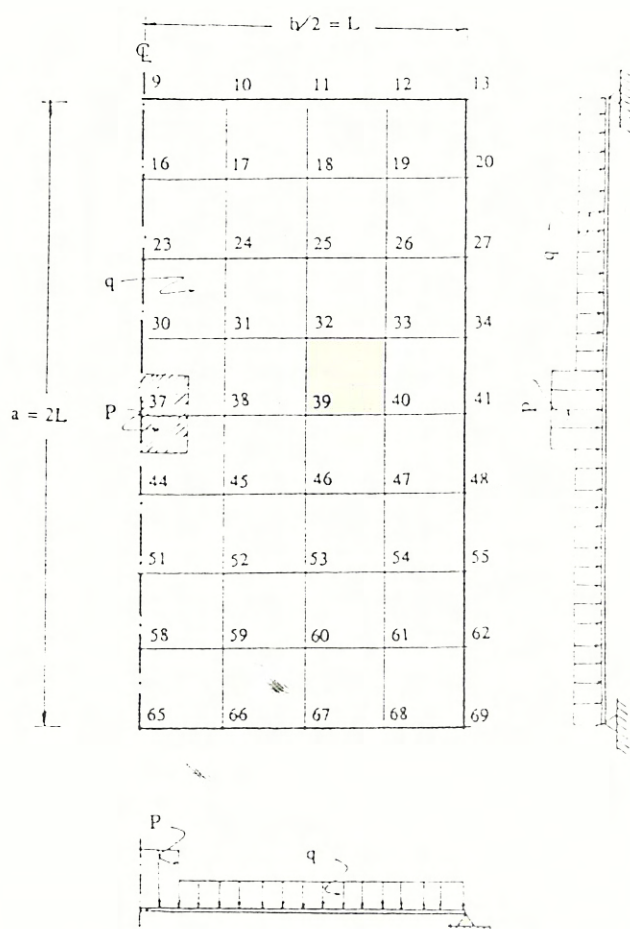
Plate	p^*		
	Tresca	Johansen	
1.	0.9476	1.0138	Present study
	0.9640	-	Koopman and Lance (1965), mesh:5x5
	-	1.0000	Nielsen (1990)
	-	1.0000	Save and Massonet (1972)
	-	1.0000 ^(u)	Manolakos and Mamalis (1986)
2.	1.7475	1.8189	Present study
3.	1.2460	1.3520	Present study
	-	1.0000 ^(l)	Manolakos and Mamalis (1986)
	-	1.4767 ^(u)	Manolakos and Mamalis (1986)
4.	0.8797	0.9075	Present study
5.	1.0173	1.2386	Present study
6.	1.5524	1.6720	Present study
	1.5960	-	Koopman and Lance (1965), mesh:5x5
	-	1.7855	Nielsen (1990)
	-	1.3333 ^(l)	Manolakos and Mamalis (1986)
	-	2.0000 ^(u)	Manolakos and Mamalis (1986)
		2.0000	Save and Massonet (1972)

$$p^* = qL^2/6Mp = 1.333 \mu$$

^(l) lower bound

^(u) upper bound

Tabel 1. Plat bujur sangkar : (ukuran jaring 4x4)



Gambar 11. Pelat dengan beban merata dan terpusat

Dengan memvariasikan k , maka beban runtuh untuk berbagai ratio antara p terhadap q dapat diperoleh dengan menggunakan metoda pemrograman linear. Hasilnya, yang dibandingkan dengan hasil pendekatan batas atas (upper-bound) dari Szillard (1984), disajikan dalam tabel 2 dan gambar 12. Sekali lagi terlihat walaupun solusi ini didasarkan atas pendekatan bawah (lower bound) akan tetapi hasilnya tidak selalu dibawah batas exact, mengingat dalam pendekatan ini leleh hanya terjadi pada titik-titik finite difference saja walaupun mungkin kenyataannya kondisi leleh sudah terjadi diantara titik-titik finite difference.

V.2 Pelat persegi panjang

Sebagaimana pada contoh V.1.1, maka pada pelat persegi panjang ($4L \times 2L$) yang menerima beban merata q , analisa beban batas dilakukan untuk pelat-pelat dengan berbagai kondisi perletakan. Lihat Gambar 13.

Karena alasan simetris, maka pemolaan (discretization) dari pelat dapat dilakukan hanya pada seperempat bagian dari pelat. Gambar 14 menunjukkan penomoran dari model yang sudah dipolakan.

Kondisi-kondisi keseimbangan dan lelehnya persis sama dengan yang ada pada pelat bujur sangkar. Perbedaannya hanya terletak pada titik 8 sampai dengan 14 yang sekarang berada pada garis simetris sehingga kondisi-kondisi simetris dapat diterapkan kepada titik-titik tersebut. Hasil dari perhitungan terhadap pelat-pelat ini ditunjukkan pada tabel 3.

VI. Kesimpulan

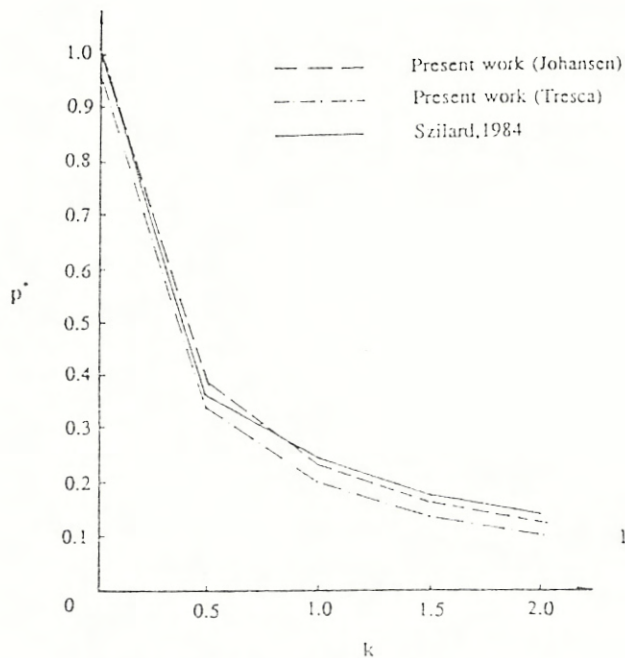
1. Hasil analisa kekuatan batas yang diperoleh dari metode pendekatan ini cukup dekat dengan hasil-hasil yang didapat peneliti lainnya.
2. Sekali lagi terlihat, walaupun metoda pendekatan ini didasarkan pada teori pendekatan batas bawah akan tetapi hasilnya tidak selalu harus dibawah hasil exact, mengingat leleh hanya dan / atau dipaksakan terjadi pada titik-titik finite difference saja. Jadi semakin halus jaring (mesh) dibuat akan semakin tepat hasil yang diperoleh.
3. dengan membuat program yang interactive, maka persoalan dapat diselesaikan dengan mudah, cepat dengan hasil yang akurat.

No	$k = \frac{p}{qab}$	Collapse multiplier p^* (load factor)		
		Tresca	Johansen	Szillard, 1984(+)
1.	2.0	0.1040	0.1263	0.1412
2.	1.5	0.1368	0.1621	0.1783
3.	1.0	0.1973	0.2288	0.2403
4.	0.5	0.3407	0.3805	0.3568
5.	0.0	0.9476	1.0138	1.0000

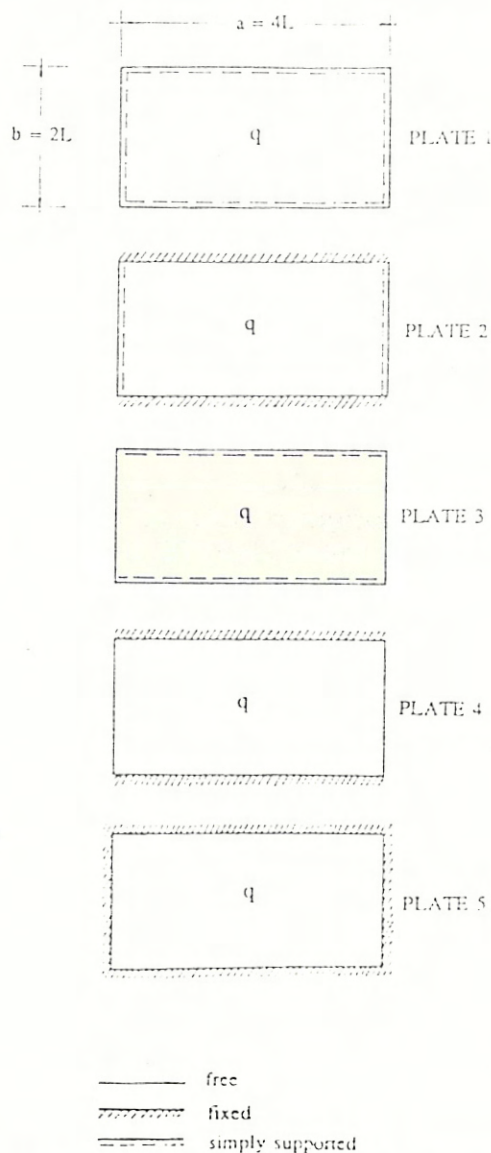
$$p^* = qL^2/6Mp = 1.333 \mu$$

(+) Johansen yield, upper bound solution

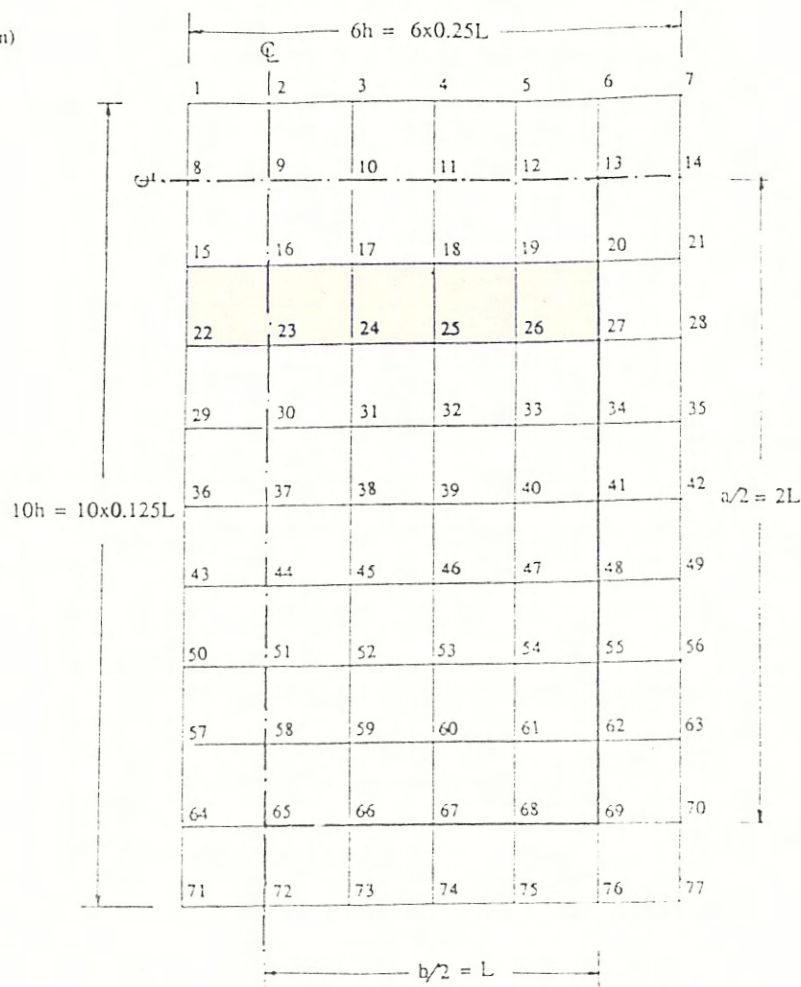
Tabel 2. Variasi beban runtuh dari berbagai ratio beban terpusat terhadap beban merata.



Gambar 12. Variasi p^* terhadap k



Gambar 13. Lima type pelat persegi panjang



Gambar 14. Model pelat persegi panjang

Daftar pustaka

1. Charnes, A. and Greenberg, H.J. (1951). Plastic collapse and linear programming, Amer. Math. Soc, Abstract 506.
2. Koopman, D.C. and Lance, R.H. (1965). On linear programming and Plastic limit analysis, Jnl. Mech. Phys. Solids, 13, 77-87.
3. Maier, G. (1970). A matrix theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes, Meccanica, 5, 54-56.
4. Manolacos, D.E. and Mamalis, A.G. (1986). Upper-and Lower- bounds for rectangular plates transversely loaded, Int. Jnl. Mech. Sci., 28, 801-812.
5. Nielsen, M.P. (1990). Limit Analysis and Concrete Plasticity, Prentice Hall, New Jersey.
6. Save, M.A. and Messo-net, C.E. (1972). Plastic Analysis and Design of Plates,

Plate	p^*		
	Tresca	Johansen	
1.	0.6102	0.6565	Present study
	-	0.6000	Nielsen (1990)
	-	0.60000	Save and Massonet (1972)
	-	0.5833 ^(a)	Manolakos and Mamalis (1986)
	-	0.5892 ^(u)	Manolakos and Mamalis (1986)
2.	0.9360	0.9550	Present study
	-	0.7500 ^(a)	Manolakos and Mamalis (1986)
	-	1.0000 ^(u)	Manolakos and Mamalis (1986)
3.	0.5860	0.5885	Present study
4.	0.6629	0.6871	Present study
5.	1.0186	1.0515	Present study
	-	1.1670	Nielsen (1990)
	-	0.8333 ^(a)	Manolakos and Mamalis (1986)
	-	1.1784 ^(u)	Manolakos and Mamalis (1986)

$$p^* = qL^2/6Mp = 1.333 \mu$$

^(a) lower bound

^(u) upper bound

Tabel 3. Beban runtuh untuk pelat persegi panjang

Shells and Disks, North--Holland Publishing, Amsterdam-London.

7. Sciconic (1990). Sciconic user guide version 2.00, SD-Scicon, Wavendon, Milton Keynes.
8. Shull, H.E and Hu, L.W. (1963). Load-carrying capacities of simply supported rectangular plates, Jnl. Appl. Mech., 30, 617- 621.
9. Szilard, R. (1974). Theory and Analysis of Plates, Classical and Numerical Methods, Prentice Hall, New Jersey.

PENULIS

Ir Wawan Witarnawan Sukarja, Msc. ME, lulusan sarjana teknik Sipil ITB tahun 1980 dan Master of Science dalam bidang teknik jalan dari ITB tahun 1984.

Master of Engineering dalam bidang struktur dari UNSW Sidney tahun 1992, adalah peneliti pada bidang Konstruksi Bangunan Pelengkap Jalan Pusat Litbang Jalan sejak tahun 1980 sampai sekarang.

FORMAT ARTIKEL FORUM PENELITIAN

**Pendahuluan
Metoda Penelitian
Kerangka Pemikiran
Hasil dan Pembahasan
Kesimpulan dan Saran
Daftar Pustaka
Lampiran**

