



PENDEKATAN LINIER PROGRAMMING METODA FINITE DIFFERENCE DALAM MENGHITUNG BEBAN DARI PELAT BUNDAR

Wawan Witarnawan Sukarja

RINGKASAN

Penerapan pemrograman matematis terhadap analisa batas digunakan untuk menghitung beban runtuh dari pelat-pelat bundar yang menerima beban berat merata. Kondisi leleh dari bidang tegangan 'Modified Tresca' digunakan didalam seluruh perhitungan. Hasil yang diperoleh dari pendekatan ini mendekati hasil teoritis yang sudah diterbitkan terdahulu.

SUMMARY

The application of Mathematical Programming to the limit analysis is used to calculate the collapse loads of circular plates under uniformly distributed loading. A Modified Tresca yield condition was used for all the runs. Close agreement with reported exact solutions are obtained in all cases.

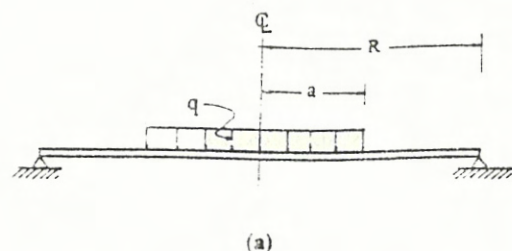
I. PENDAHULUAN

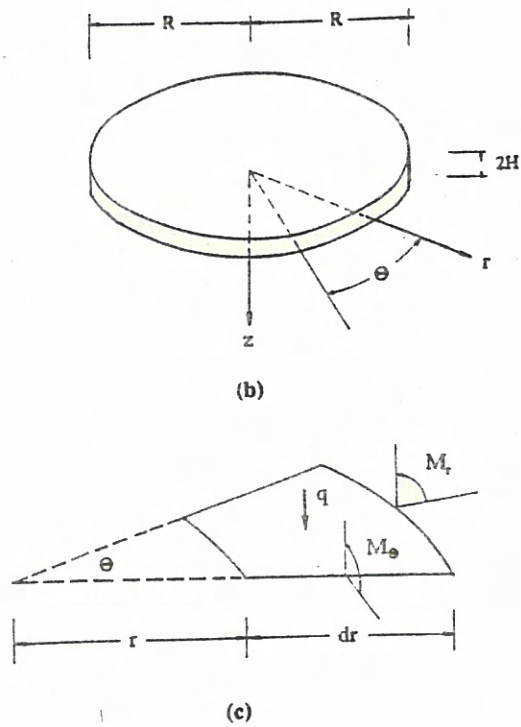
Penerapan pemrograman linier kali ini akan digunakan untuk memecahkan beban batas/runtuh dari pelat bundar yang ditumpu pada perletakan sederhana dan jepit. Pelat bundar yang bagian tengahnya berlubang (with centre cut-out) juga dicoba dianalisa agar diperoleh gambaran yang lebih jelas dari penerapan syarat batas. Sebagaimana biasanya didalam menggunakan pemograman linier dengan pendekatan batas bawah (lower bound), maka dalam persoalan ini beban/faktor beban akan dimaksimumkan (maximized) dengan batasan-batasan syarat keseimbangan (equilibrium) dan syarat leleh (yield). Suatu program interactive, dalam bahasa FORTRAN, yang dapat mengenerate semua persamaan linier yang ada pada titik-titik (nodes) didalam model dibuat, kemudian semua persamaan linier tadi disajikan dalam format yang sesuai dengan paket program linier yang dipilih. Didalam hal ini untuk memecahkan semua persamaan linier yang terbentuk digunakan paket program SCICONIC.

II. PERSAMAAN KESEIMBANGAN PELAT BUNDAR

II.1 Persamaan keseimbangan differential elemen pelat

Tinjau suatu pelat bundar tipis dengan radius R dan ketebalan $2H$ yang menerima beban merata q seperti ditunjukkan pada Gambar 1. Momen radial M_r dan momen lingkaran M_θ dianggap positif bila menghasilkan tarik pada serat bawah pelat sedangkan gaya geser V dianggap positif bila bekerja kearah bawah.





Gambar 1. Pelat bundar : (a) struktur (b) sistim kordinat (c) elemen dif-ferential pelat.

Persamaan keseimbangan dari elemen pelat bundar setelah diturunkan adalah,

$$\frac{d}{dr}(r M_r) - M_\theta = \int^r q r dr \dots (1)$$

Sedangkan momen-momen plastis dari penampang pelat adalah,

$$M_{r0} = \sigma_{r0} H^2 \dots (2a)$$

$$M_{\theta0} = \sigma_{\theta0} H^2 \dots (2b)$$

dimana σ_{r0} dan $\sigma_{\theta0}$ adalah kekuatan leleh arah radial dan tangensial dari material pelat yang orthotropis.

II.2 Syarat-syarat batas

Suatu ekspresi dari keseimbangan pelat memerlukan persyaratan tambahan, yaitu berupa kondisi-kondisi batas. Untuk itu tiga kondisi batas gaya yang digunakan adalah :

(a) Perletakan sederhana (simply supported) :

$$M_r = 0 \dots (3a)$$

(b) Perletakan bebas (free) :

$$M_r = 0 \dots (3b)$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 0 \dots (3c)$$

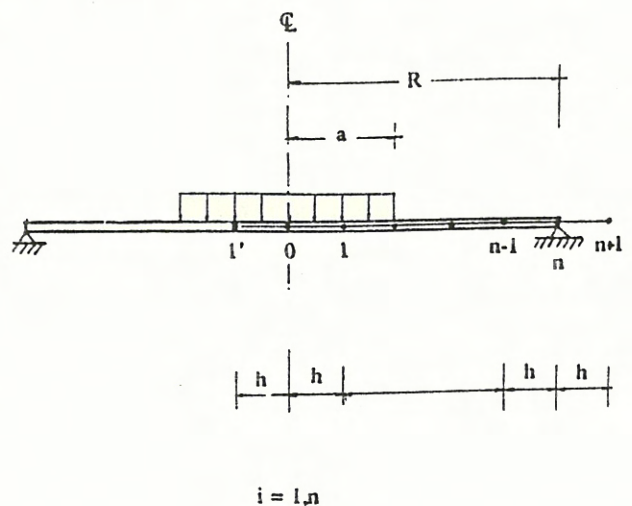
(c) Perletakan jepit (clamped) :

tidak ada batasan \dots (3d)

Perlu dicatat bahwa kondisi (3c) mencerminkan kondisi $V = 0$.

III. PENERAPAN FINITE DIFFERENCE PADA PERSAMAAN KESEIMBANGAN

Suatu pelat bundar dengan radius R dibagi kedalam sejumlah titik yang mempunyai interval h, titik 0 dan titik (n+1) adalah titik-titik 'dummy' (Gambar 2). Persamaan keseimbangan (1) perlu dituliskan dalam bentuk finite difference. Dengan melakukan manipulasi sederhana terhadap persamaan (1), maka persamaan keseimbangan titik i yang merupakan titik 'generic' dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut :



Gambar 2. Diskretisasi pelat dalam pola Finite Difference.

$$M_{ri} + r_i \frac{dM_{ri}}{dr} - M_{\theta i} = - \frac{q r_i^2}{2} \dots (4)$$

Dengan menerapkan pendekatan 'central difference', maka persamaan (4) ini sekarang disajikan dalam bentuk finite difference sebagai berikut :

$$M_{ri} + r_i \left[\frac{M_{ri+1} - M_{ri-1}}{2h} \right] - M_{\theta i} = - \frac{q r_i^2}{2} \dots (5)$$

Agar supaya persamaan (5) dapat dinyatakan dalam bentuk tanpa dimensi, maka perlu dibuat suatu konstantan 'anisotropic' yang didefinisikan sebagai berikut :

$$M_{r0} = (1 - \alpha) M_{\theta 0} \dots (6)$$

Demikian pula kuantitas lainnya yang perlu didefinisikan adalah :

$$a_i = M_{ri} / M_{r0}$$

$$b_i = M_{\theta i} / M_{\theta 0}$$

$$\mu p = q a^2 / M_{\theta 0}$$

μ adalah faktor beban

Dengan mensubstitusikan semua kuantitas diatas kedalam persamaan (5), maka diperoleh persamaan berikut ini,

$$a_i + \frac{r_i}{2h} [a_{i+1} - a_{i-1}] - \frac{b_i}{1 - \alpha} + \mu z_i p = 0 \quad (7a)$$

dimana z_i didefinisikan sebagai berikut :

$$z_i = \frac{r_i^2}{2 a^2 (1 - \alpha)}, \quad \text{if } r_i \leq a \dots (7b)$$

$$z_i = \frac{1}{2(1 - \alpha)}, \quad \text{if } r_i > a \dots (7c)$$

Secara umum, kondisi keseimbangan titik-titik yang berada pada pelat bundar dapat ditulis sebagai berikut,

$$\underline{A} \underline{a} - \frac{1}{(1 - \alpha)} \underline{b} + \mu \underline{z} \underline{p} = 0 \dots (8)$$

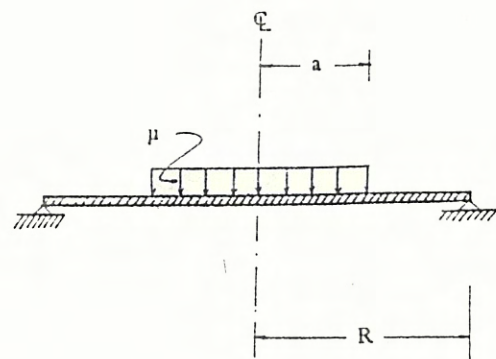
Dimana \underline{A} adalah suatu 'self-evident matrix'

dari koefisien- koefisien finite difference; \underline{a} dan \underline{b} adalah variabel-variabel moment, dan \underline{p} adalah vector beban.

IV. CONTOH-CONTOH PERHITUNGAN

Contoh 1

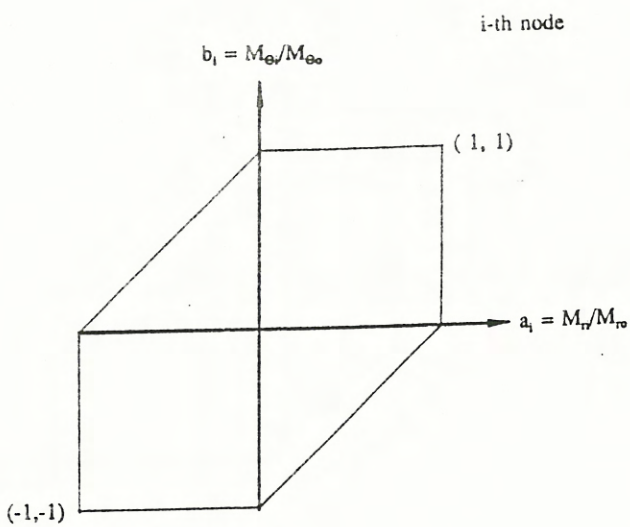
Contoh pertama ini berkaitan dengan perhitungan beban runtuh dari pelat-pelat bundar yang ditumpu sederhana dan dijepit. Pelat-pelat ini dianalisa dengan mempertimbangkan suatu beban merata yang bekerja diatas bidang bundar dengan radius beban dan derajat anisotropy yang bervariasi yang didefinisikan kedalam parameter- parameter a/R dan α . Kondisi beban diatas pelat yang ditumpu sederhana dapat dilihat dalam Gambar 3.



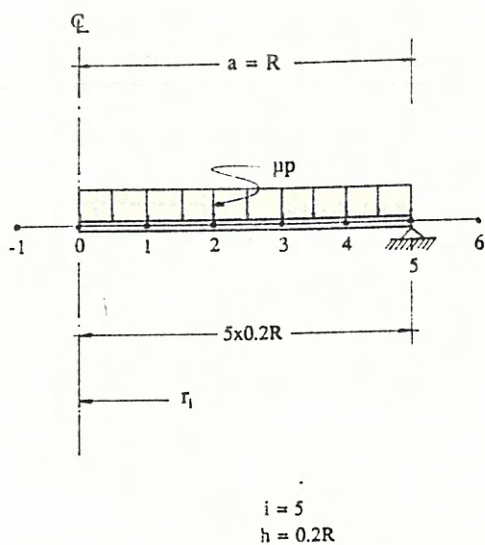
Gambar 3. Pelat bundar (contoh 1)

Kondisi leleh 'Modified Tresca' yang diberikan dalam bentuk tanpa dimensi (Gambar 4) akan digunakan dalam semua analisa perhitungan.

Adapun contoh perhitungan detail yang diberikan berikut ini adalah untuk kasus dimana $a = R$ (pelat dibebani penuh) dan $\alpha = 0$ (isotropis). Diskretisasi model yang digunakan, pelat dibagi menjadi 5 bagian, ditunjukkan dalam Gambar 5.



Gambar 4. Tresca hexagon.



Gambar 5. Diskretisasi model.

Pemrograman linier dari persoalan analisa batas ini adalah :

$$\mu_c = \text{maksimumkan } \mu \quad \dots \dots \dots (9a)$$

dengan batasan :

$$\text{Keseimbangan : } \underline{A} \underline{a} - \underline{b} + \mu \underline{z} = \underline{0} \quad (9b)$$

$$\text{Syarat batas : } a_5 = 0 \quad \dots \dots \dots (9c)$$

$$\text{Syarat leleh : } \underline{Q} - \underline{V} \underline{x} = \underline{0}, \quad \underline{x} \geq \underline{0} \quad (9d)$$

$$\underline{U}^T \underline{x} \leq \underline{1}$$

dimana :

$$\underline{a}^T = [a_1, \dots, a_6] \quad \dots \dots \dots (9e)$$

$$\underline{b}^T = [b_1, \dots, b_5] \quad \dots \dots \dots (9f)$$

$$\underline{z}^T = [1, 1, 1, 1, 1, 1] \quad \dots \dots \dots (9g)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -0.5 & 1 & 0.5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1.5 & 1 & 1.5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2.0 & 1 & 2.0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2.5 & 1 & 2.5 \end{bmatrix} \quad (9h)$$

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0.02 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0.08 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0.18 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0.32 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0.50 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \dots \dots (9i)$$

$$\underline{Q}^T = [\dots \underline{Q}^j{}^T \dots] \quad \dots \dots \dots (9j)$$

$$\underline{Q}^j{}^T = [a_j, b_j]$$

$$j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\underline{V} = \text{diag} [\underline{V}^j] \quad \dots \dots \dots (9k)$$

$$\underline{V}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^T = [\dots \underline{x}^j{}^T \dots] \quad \dots \dots \dots (9l)$$

$$\underline{x}^j{}^T = [X_1, \dots, X_6]$$

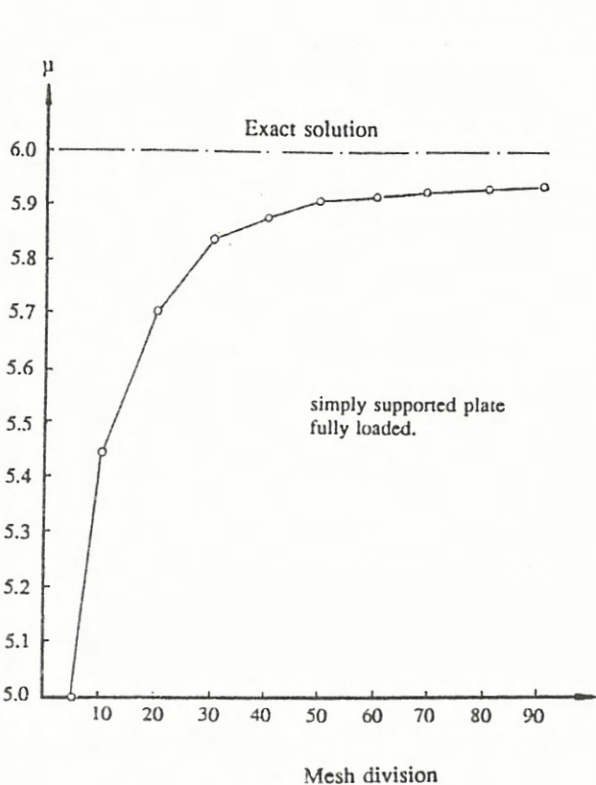
$$\underline{U}^T = \text{diag} [\underline{U}^j{}^T] \quad \dots \dots \dots (9m)$$

$$\underline{U}^j{}^T = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Perlu dicatat bahwa titik-titik vertex yang ada dalam pers.(9k) diperoleh dari Tresca hexagon Gambar 4.

Persoalan ini melibatkan 25 batasan (6 syarat keseimbangan, 1 syarat gaya, 18 syarat leleh) dan 51 variabel. Faktor beban runtuh $\mu_c = 5$ diperoleh. Harga ini lebih kecil dari harga exact yaitu 6 (Nielsen, 1990).

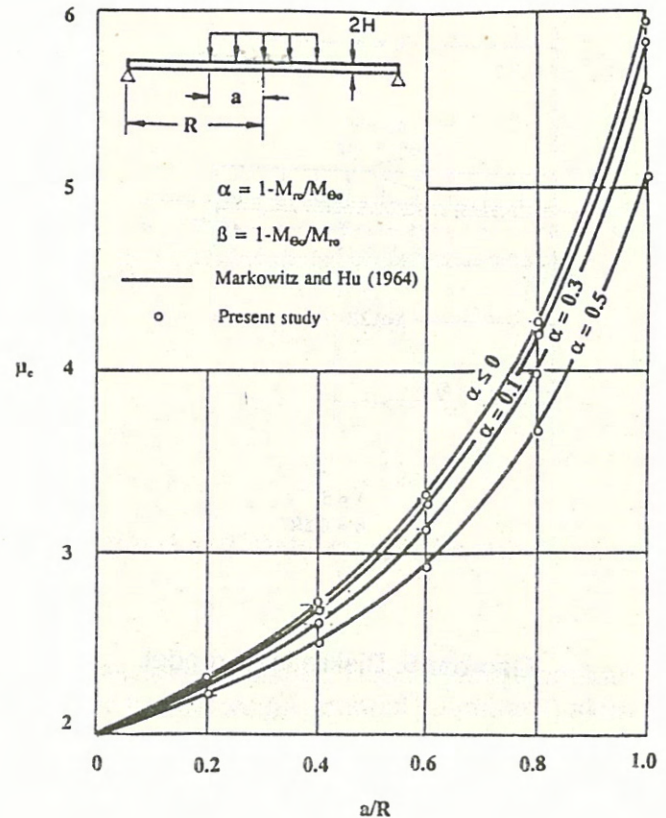
Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti, maka jumlah titik pada jaring (mesh) finite difference perlu lebih rapat. Untuk itu pembagian pelat perlu ditingkatkan, yakni dengan membagi pelat dari mulai dibagi 5 sampai 90. Hasilnya ditunjukkan pada Gambar 6. Untuk pelat yang dibagi menjadi 90 bagian, maka perbedaan hasil yang diperoleh dengan hasil exact hanya berkisar 1%.



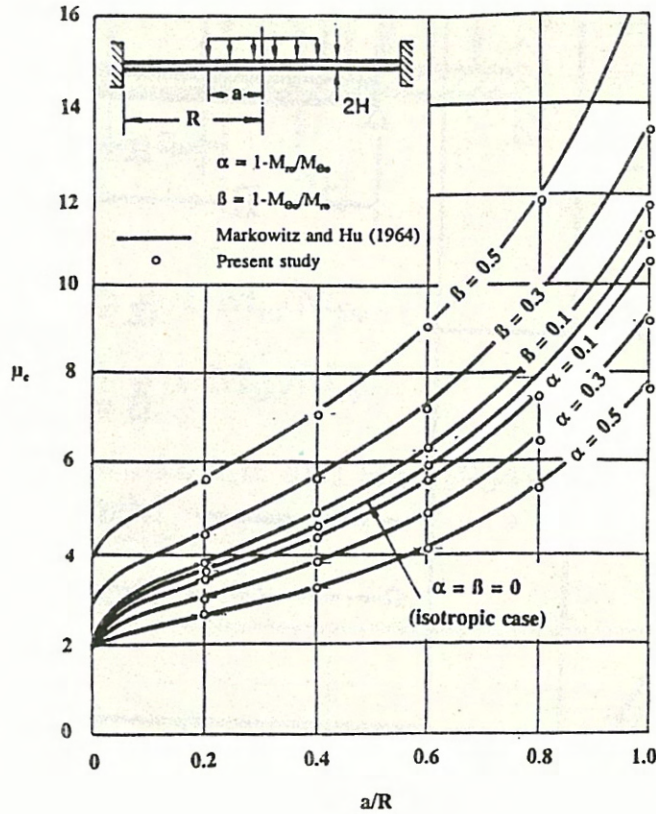
Gambar 6. Variasi beban runtuh terhadap pembagian jaring.

Untuk berbagai kasus lainnya (seperti untuk $a/R = 0.2, 0.4, 0.6$, dan 1.0 serta $\alpha = 0, 0.1, 0.3, 0.5$) dianalisa dengan menggunakan pembagian pelat kedalam 90 bagian. Hasilnya diperlihatkan pada Gambar 7 yang langsung diimpitkan dengan hasil perhitungan analitis dari Markowitz dan Hu (1964). Kesesuaian hasil diperoleh dalam semua kasus.

Untuk pelat yang dijepit pada sisi-sisinya dianalisa dengan cara yang sama. Beban runtuh untuk pelat-pelat dengan $a/R = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ dan $\alpha = 0, 0.1, 0.3, 0.5$ serta $\beta = 0, 0.1, 0.3, 0.5$ diperoleh. Hasilnya diperlihatkan dalam Gambar 8 yang juga diimpitkan dengan hasil dari Markowitz dan Hu (1964). Disinipun terlihat kesesuaian hasil diperoleh dalam semua kasus.



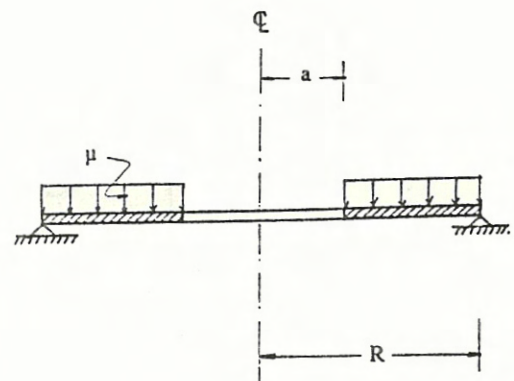
Gambar 7. Beban-belan runtuh pelat bundar ditumpu sederhana.



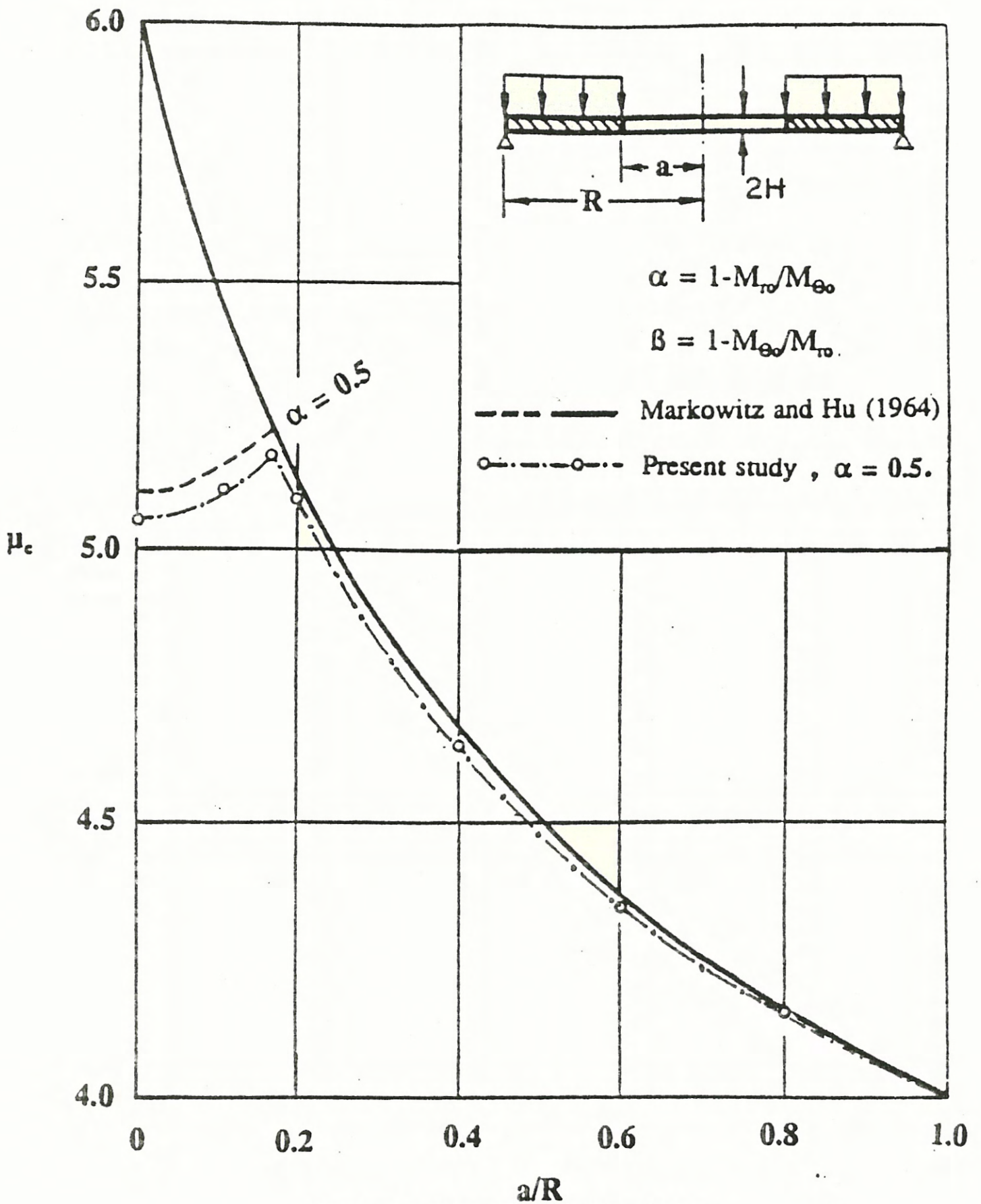
Gambar 8. Beban-beban runtuh pelat bundar ditumpu jepit.

Contoh 2

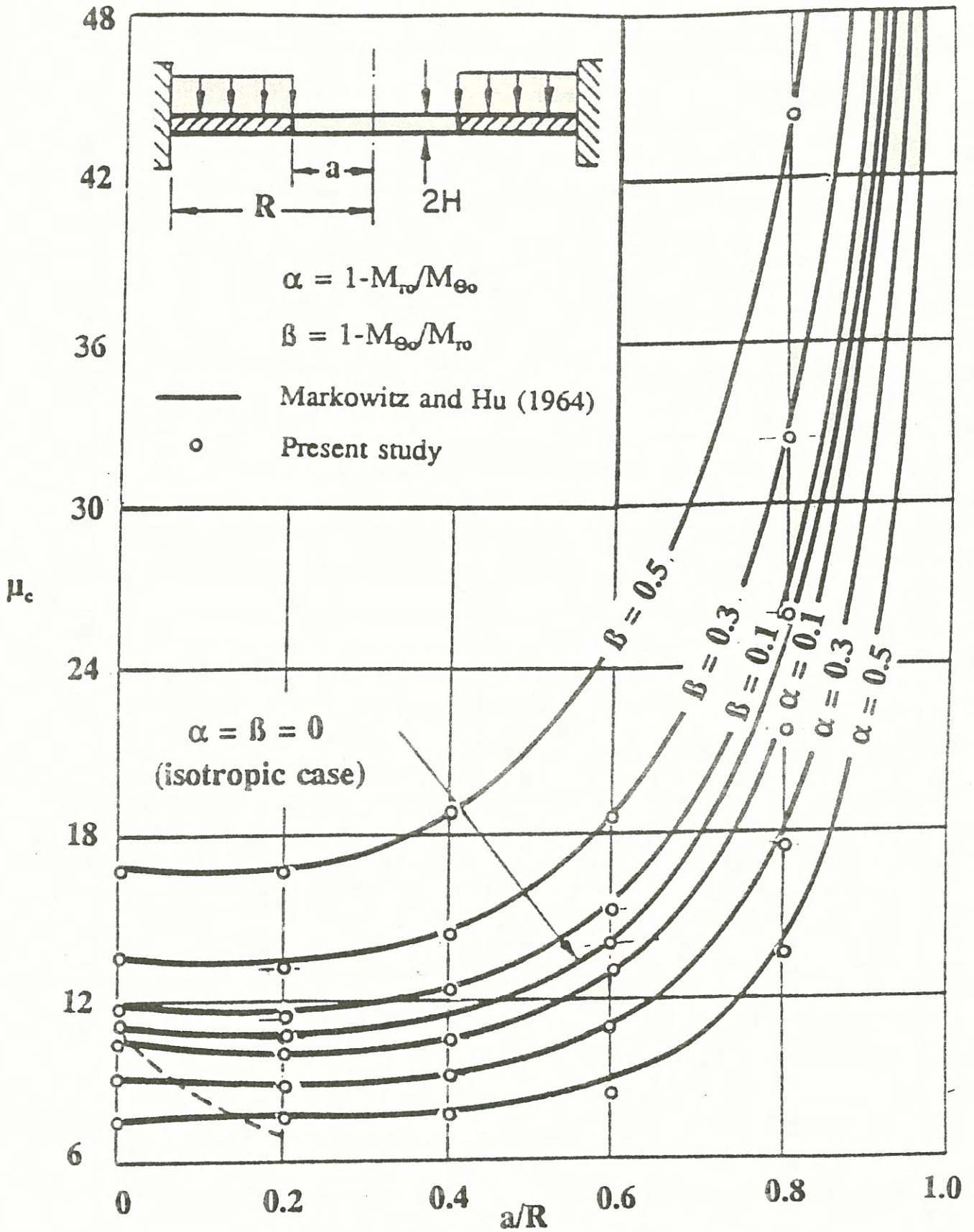
Persoalan yang ditinjau didalam contoh ini adalah suatu pelat bundar yang dibagian tengahnya berlubang seperti yang ditunjukkan pada Gambar 9; kasus pelat yang ditumpu sederhana dibebani oleh beban merata di atasnya. Markowitz dan Hu (1964) telah menurunkan perhitungan beban runtuh teoritis untuk soal ini, seperti yang ditunjukkan dalam Gambar. Pada harga a/R kecil, untuk suatu harga α (katakanlah 0.5), maka beban runtuh divariasikan dengan a/R akan mengikuti garis-garis yang terputus sedangkan diluar satu harga tertentu dari a/R (0.169 untuk $\alpha = 0.5$), maka beban runtuh akan mengikuti garis penuh.



Gambar 9. Pelat bundar dengan lubang ditengah (contoh 2)



Gambar 10. Beban-beban runtuh pelat bundar berlubang yang ditumpu sederhana.



Gambar 11. Beban-beban runtuh pelat bundar berlubang yang ditumpu jepit.

Untuk membuktikan hal ini, maka pendekatan pemograman linier dilakukan. Analisa dan diskretisasi model dari pelat persis sama seperti yang telah dilaksanakan pada Contoh 1, kecuali pada titik yang berada pada sisi tengah (sisi lubang), maka diterapkan kondisi batas tumpuan bebas. Hasil yang diperoleh untuk $\alpha = 0.5$ dan $a/R = 0, 0.1, 0.169, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ dan 1.0 diperlihatkan dalam Gambar 10 yang langsung diimpitkan dengan kurva teoritis dari Markowitz dan Hu (1964). Hasil yang mendekati sama diperoleh dalam semua kasus.

Demikian pula untuk kasus pelat berlubang yang dijepit pada tepi luarnya perhitungan dilakukan untuk $\alpha = 0, 0.1, 0.3, 0.5$; $\beta = 0.1, 0.3, 0.5$ dengan $a/R = 0, 0.2, 0.4, 0.6$ dan 0.8 . Hasilnya diberikan dalam Gambar 11 dan diimpitkan dengan yang didapat oleh Markowitz dan Hu (1964). Disinipun kedekatan hasil diperoleh untuk semua kasus.

V. KESIMPULAN

1. Hasil analisa beban batas yang diperoleh dari metode pendekatan ini cukup dekat dengan yang diperoleh dari perhitungan teoritis.
2. Didalam beberapa kasus akan merupakan suatu keharusan untuk melakukan studi sensitivitas terhadap hasil perhitungan agar dapat diperkirakan ketelitian dari hasil yang diperoleh.
3. Dengan membuat program yang interactive dan dapat mengenerate semua persamaan yang ada dalam model, maka perhitungan dapat diselesaikan dengan mudah, cepat dan tepat.

Daftar Pustaka

- Charnes, A. and Greenberg, H.J. (1951). Plastic Collapse and Linear Programming, Amer. Math. Soc., Abstract 506.
- Markowitz, and Hu, L.W. (1964). Plastic Analysis of Orthotropic Circular Plates, Jnl. Eng. Mech. Div., Proc. of ASCE, 20, 251- 293.
- Save, M.A. and Massonet, C.E. (1972). Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks, North-Holland Pub-

lishing, Amsterdam- London.

- Sciconic (1990). Sciconic user guide version 2.00, SD-Scicon, Wavendon, Milton Keynes.
- Sukarja, W.W. (1992). Pendekatan Linier programming metoda finite difference dalam menghitung beban batas struktur (balok), Jurnal Pusat Litbang Jalan, no.2 tahun IX, September 1992.
- Sukarja, W.W. (1992). Pendekatan linier programming metoda finite difference dalam menghitung beban batas dari pelat persegi, Jurnal Pusat Litbang Jalan, no.3 tahun IX, Desember 1992.
- Sukarja, W.W (1992). Limit Analysis of Structures : A Finite Difference Linear Programming Approach, Master of Engineering Thesis, The University of New South Wales, Australia.

Penulis :

Ir. Wawan Witarnawan Sukarja, MSC, ME.

Lulusan Sarjana Teknik Sipil ITB tahun 1980 dan Master of Science dalam Bidang Teknik Jalan dari ITB tahun 1984.

Master of Engineering dalam Bidang Struktur dari UNSW Sidney tahun 1992, adalah peneliti pada Bidang Konstruksi Bangunan Pelengkap Jalan Pusat Litbang Jalan sejak tahun 1980 sampai sekarang.

FORMAT ARTIKEL FORUM PENELITIAN

**Pendahuluan
Metoda Penelitian
Kerangka Pemikiran
Hasil dan Pembahasan
Kesimpulan dan Saran
Daftar Pustaka
Lampiran**

