



PENDEKATAN LINEAR PROGRAMMING FINITE DIFFERENCE DALAM MENGHITUNG BEBAN BATAS DARI STRUKTUR

(Bagian I : B A L O K)

Wawan Witarnawan Sukarja

RINGKASAN

Didalam tulisan ini penulis akan mencoba untuk lebih memperkenalkan cara perhitungan kekuatan batas dengan pendekatan Linear Programming metoda finite difference. Keseluruhan pembahasan akan diberikan dalam tiga penerbitan. Pada penerbitan pertama akan dibahas mengenai balok, penerbitan kedua mengenai pelat persegi/bundar dan pada penerbitan ketiga mengenai cangkang silinder (Cylindrical shell).

Teori plastisitas statis (the static theorem of plasticity) digunakan didalam merumuskan persoalan penentuan beban-beban batas dari suatu struktur yang sudah dipolakan (discretized).

Pendekatan ini melibatkan dua kumpulan syarat-syarat batas (constraint) yaitu : syarat keseimbangan (equilibrium) dan konformitas leleh (yield conformity). Cara central difference dari teori finite difference digunakan untuk melinearkan persamaan keseimbangan yang tidak linear.

Kondisi-kondisi batas gaya (force boundary conditions) dimasukkan kedalam persamaan keseimbangan agar sistem struktur secara keseluruhan dapat dianalisa secara benar. Dengan menggunakan metoda pendekatan garis lurus terpatah (piecewise linear approximation), maka permukaan - permukaan leleh (yield surface) dari beton yang bersifat non linear bisa didekati menjadi linear. Dengan demikian persoalan "Mathematical Programming" ini akan menjadi suatu persoalan pemograman linear (Linear Programming).

SUMMARY

The static theorem of plasticity is used to formulate the problem of finding the collapse loads of the suitably discretized structures. The approach involves obtaining two sets of constraints, equilibrium and yield conformity. The central difference scheme of finite difference theory has been used to linerize the nonlinear differential equations of equilibrium.

Force boundary conditions need to be included to specify the surface, piece wise linear approximation, are also used in the analysis so that the mathematical programming problem becomes one of linear programming.

I. Pendahuluan

Pada beberapa kasus perhitungan kekuatan batas untuk struktur, hasil yang pasti (exact solution) terkadang tidak bisa diperoleh. Oleh karena itu sering diperlukan cara perhitungan pendekatan atas/bawah

(upper / lower / bound) yang memungkinkan batas atas dan bawah dari beban runtuh dapat didekati. Cara perhitungan analitis mempunyai keuntungan dalam memperoleh hasil yang 'exact', sedangkan dua

kerugian utamanya adalah : Pertama, diperlukannya pengetahuan dan intuisi yang memadai dari penganalisa didalam menentukan daerah /mekanisme plastis yang mungkin terjadi. Kedua , metoda analitis hanya dapat diterapkan terhadap persoalan- persoalan yang relatif sederhana. Didalam hal ini cara pemecahan dengan 'Mathematical Programming', lebih khusus lagi 'Linear Programming, yang mempunyai cara pendekatan menyeluruh, sistematis dan efisien akan memberikan alternatif yang menguntungkan.

Metoda pendekatan ini diperkenalkan oleh Charnes dan Greenberg (1951) didalam mengatasi kerumitan perhitungan kekuatan batas strukrur rangka. Beberapa buku rujukan yang mengupas mengenai perkembangan metoda ini diberikan oleh Maier dan Munro (1982) dan Maier dan Lloyd Smith (1986).

II. Analisa batas sebagai persoalan Pemograman Matematis.

Analisa batas terhadap suatu struktur dapat dilakukan dengan cara pendekatan statis (Lower-bound) atau kinematis (Upper-bound). Didalam tulisan ini pendekatan statis akan dipilih, mengingat cara ini akan lebih mudah dipecahkan dengan pemograman linear. Adapun Pemograman linear dengan cara ini dituliskan sbb :

fungsi objektif :

- maksimum beban

dengan batasan :

- batasan keseimbangan (equilibrium constraints)
- batasan leleh (yield constraints)

Untuk struktur, umumnya persoalan diatas merupakan pemograman yang non-linear, mengingat baik batasan keseimbangan maupun batasan leleh mungkin berupa persamaan-persamaan yang non-linear.

a. persamaan keseimbangan

Secara umum, persamaan keseimbangan dari struktur yang sudah dipolakan (discretized) dapat dinyatakan sbb:

$$\underline{A} \underline{Q} = \underline{\mu} \underline{P} \quad (1)$$

dimana $\underline{A}$ adalah matrix keseimbangan, $\underline{P}$ adalah vector beban- beban terpusat yang

bekerja pada tiap-tiap titik (nodes) finite difference , $\underline{\mu}$ adalah faktor beban (load multiplier) dan $\underline{Q}$ adalah vector resultan gaya-gaya dari setiap titik yang berada pada struktur.

b. Persamaan leleh.

Suatu sistem sendi plastis akan dapat terbentuk (generalized) pada setiap titik didalam model struktur. Kondisi konformitas leleh dari satu titik i didalam struktur dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$f(\underline{Q}_i) \leq 0 \quad (2)$$

kondisi (2) diatas dapat berbentuk persamaan yang non-linear, akan tetapi sebagaimana yang diajukan oleh Maier dan Munro (1982) masalah pelinearan dari persamaan diatas dapat dilakukan dengan pendekatan garis lurus terpatah (piecewise linear approximation). Formulasi 'vertex' seperti yang dikenalkan oleh Zavelani-Rossi (1973) dipakai agar secara matematis dapat menggambarkan kondisi leleh dari polygon-polygon garis lurus terpatah (gbr.1).

Vector Gaya $\underline{Q}_i$ pada titik 'generic' i dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari koefisien-koefisien yang tidak negatif (convex multiplier) dari sudut-sudut vector polygon leleh sebagai berikut :

$$\underline{Q}_i = \underline{V}_i \underline{x}_i, \quad x_i \geq 0 \quad (3)$$

Dimana $\underline{V}_i$ adalah matrix yang berisi kumpulan titik-titik vertex dari polygon garis lurus terpatah. Konformitas leleh akan terjamin bila dipenuhi :

$$\underline{U}_i^T \underline{x}_i \leq 1 \quad (4)$$

Dimana $\underline{U}_i$ adalah transpose dari vector satuan (unity vector) yang banyaknya sama dengan banyak titik vertex, sedangkan x_i adalah koefisien yang tidak negatif. Gambar permukaan leleh beton, dari Tresca dan Johansen, yang sudah dilinearkan ditunjukkan pada gambar 2 dan 3.

Untuk keseluruhan struktur persamaan diatas dapat ditulis sebagai berikut :

$$\underline{Q} = \underline{V} \underline{x} \quad \text{atau}$$

$$\underline{Q} - \underline{V} \underline{x} = 0, \quad \underline{x} \geq 0 \quad (5)$$

III. Model finite difference untuk balok

a. Persamaan keseimbangan balok

Seperti telah disinggung terdahulu bahwa metoda finite difference adalah merupakan suatu teknik pendekatan dimana persamaan - persamaan differential keseimbangan dan syarat batas bisa digantikan oleh satu kumpulan persamaan-persamaan aljabar.

Keuntungannya dari metoda ini didalam persoalan analisa batas adalah dapat men'generate' dengan mudah dan efisien kondisi - kondisi keseimbangan dari suatu struktur.

Tinjau suatu elemen balok dengan panjang dx dibebani oleh beban q sebagaimana ditunjukkan pada gambar 4. Dari keseimbangan vertikal dan keseimbangan momen dihasilkan persamaan differential keseimbangan untuk elemen sebagai berikut :

$$\frac{(d^2 Mx)}{dx^2} + q = 0 \quad (6)$$

Dengan pendekatan 'central difference', maka persamaan differential diatas dapat dibuat menjadi linear. Untuk suatu titik generik i pada balok, pers.(6) dapat ditulis menjadi :

$$\frac{M_{i-1} - 2 M_i + M_{i+1}}{h^2} + q_i = 0, \quad i = 1, \dots, s \quad (7)$$

dengan memperkenalkan parameter $\mu p_0 = q_i L / Mp$, $c = L/h$ dimana L adalah panjang reference, Mp adalah kapasitas momen plastis dari penampang balok dan p_i adalah beban yang bekerja pada titik i , maka keseimbangan titik dari keseluruhan struktur dapat secara padat serta tanpa dimensi dituliskan dalam bentuk :

$$c^2 \underline{A} \underline{a} + \mu \underline{P} = \underline{0} \quad (8)$$

Dimana $\underline{A}$ adalah blok diagonal matrix keseimbangan, $\underline{a}$ adalah vector yang tidak berdimensi dari momen-momen lentur (contoh, $a_i = M_i / Mp$) dan $\underline{p}$ adalah vector beban yang bekerja yang besarnya sama dengan p_i .

Kondisi syarat batas

Agar persamaan keseimbangan dari seluruh struktur dapat diselesaikan dengan benar, maka

syarat-syarat batas dari gaya perlu dimasukkan kedalam pers.(8) diatas. Adapun tiga kasus umum yang dapat digunakan terhadap satu batas generik (generic boundary) r adalah seperti berikut ini :

$$\text{perletakan sendi : } M_r = 0 \quad (9a)$$

$$\text{perletakan bebas : } M_r = 0 \quad (9b)$$

$$dM_r / dx = 0 \quad (9c)$$

$$\text{perletakan jepit : tidak ada batasan}$$

Dengan pendekatan central difference, pers.(9) diatas diubah menjadi seperti berikut :

$$\text{perletakan sendi : } a_r = 0 \quad (10a)$$

$$\text{perletakan bebas : } a_r = 0 \quad (10b)$$

$$a_{r-1} - a_{r+1} = 0 \quad (10c)$$

$$\text{perletakan jepit : Tidak ada batas} \quad (10d)$$

$$\text{dimana : } a_r = M_r / Mp$$

Didalam kasus adanya perletakan tengah (internal suport) seperti ditunjukkan pada gambar 5a, maka perletakan tersebut digantikan oleh gaya reaksi R (Gbr.5b). Gaya tersebut dimasukkan kedalam vector gaya p dan diperlakukan sebagai suatu variabel dalam pemograman linear. Untuk lebih jelasnya, maka komponen gaya p_i untuk titik i dituliskan sebagai dibawah ini :

$$P_i = q_i h^2 - (R/h) h^2 \quad (11)$$

dimana reaksi R diperlakukan sebagai beban merata pada titik i dengan lebar penyebaran h . Persamaan (11) diatas dapat dinyatakan dalam bentuk tanpa dimensi sebagai berikut :

$$\bar{P}_i = \mu p_i - c r$$

dimana $r = R L / Mp$ dan c sama seperti pada pers.(8).

IV. Contoh-contoh perhitungan

Contoh 1.

Suatu balok kantilever yang ujungnya ditumpu

(propped cantilever) seperti pada gambar akan dianalisa. Untuk model, balok dibagi kedalam delapan elemen yang sama. Titik 0 jepit dan 8 sendi; titik-titik -1 dan 9 merupakan titik-titik 'dummy'. Gambar 6.

Bentuk pemrograman linear dari persoalan analisa batas ini adalah :

$$\mu_c = \text{maximum } \mu \quad (12a)$$

dengan batasan :

$$\text{Keseimbangan : } c^2 \underline{A} \underline{a} + \mu \underline{p} = 0 \quad (12b)$$

$$\text{syarat batas gaya : } a_8 = 0 \quad (12c)$$

$$\text{konformitas leleh : } -1 < a_i < 1, i=0, \dots, 8 \quad (12d)$$

dimana :

$$c^2 = (L/0.125 L)^2 = 64 \quad (12e)$$

$$\underline{a}^T = [a_1, \dots, a_9] \quad (12f)$$

$$\underline{p}^T = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \quad (12g)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & -2 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & -2 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & -2 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & -2 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & -2 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & -2 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & -2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

(12h)

Persoalan diatas melibatkan 21 persamaan (9 keseimbangan, 1 syarat batas gaya dan 18 konformitas leleh) dan 12 variabel. Dengan menggunakan paket program untuk pemecahan persoalan pemogram linier, dalam hal ini digunakan SCICONIC, maka persoalan pemograman linier diatas dapat diselesaikan dengan cepat, mudah dan efisien. Beban runtuh (collapse load) yang diperoleh dari pendekatan ini adalah $U_c = 11.733$, atau kurang lebih 0,57 % lebih besar dari hasil exact yaitu 11.666. Selain dari besarnya beban runtuh, maka formasi titik-titik yang mengalami leleh juga secara otomatis dapat dilihat. Didalam kasus ini sendi-sendi plastis terbentuk pada titik 0 dan 5 yang memberikan mekanisme keruntuhan (collapse

mechanism) seperti pada gambar 7.

Contoh 2.

Seperti pada contoh 1 hanya satu perletakan baru ditempatkan pada titik 2 (Gambar 8). Sebagaimana telah dibahas pada seksi 6.b diatas, maka persoalan pemograman linear yang sama seperti pada soal 1 tetap dapat digunakan dengan cara menambahkan satu variabel yang mewakili reaksi perletakan pada titik 2. Sehingga hanya vector p saja yang berubah menjadi sbb:

$$\underline{p}^T = [1, 1, (1-8) r', 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

dimana $r' = r/\mu$. Hasil yang diperoleh dari program linear ini adalah $\mu = 21.333$ atau 2,91 % lebih besar dari hasil exact sebesar 20,73. Mekanisme keruntuhan yang diperoleh dari analisa ditunjukkan pada gambar 9.

Contoh 3.

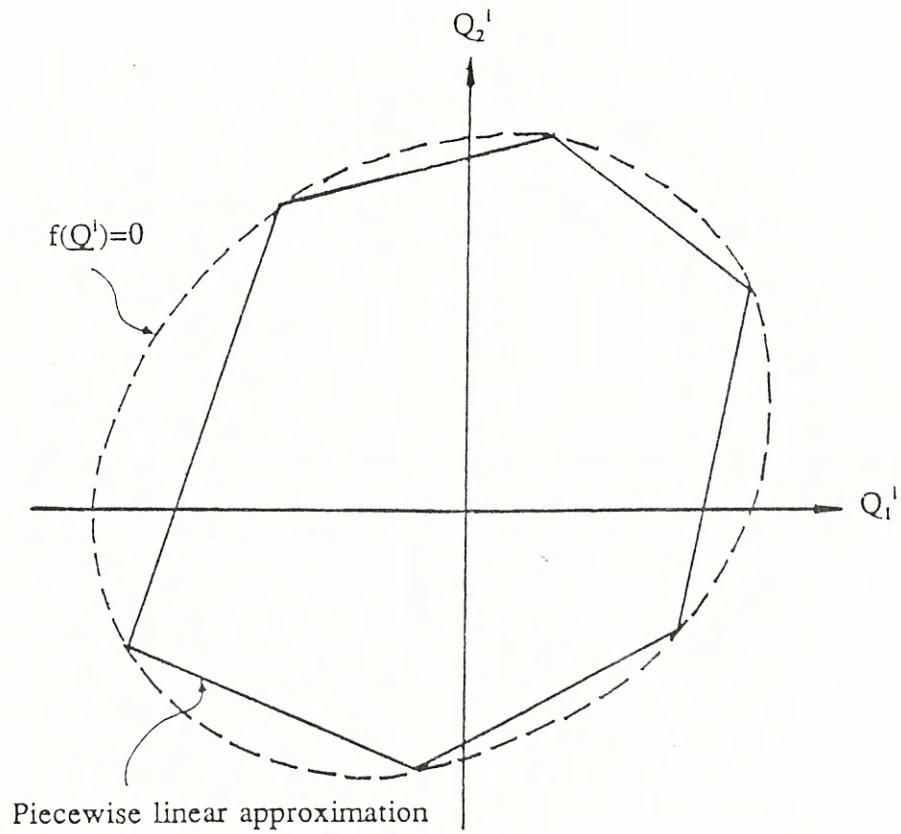
Pada contoh ini, beban merata seperti pada contoh 1 digantikan dengan satu beban terpusat yang bekerja pada titik 4 (Gambar 10.). Sekali lagi persoalan pemograman linear pada contoh 1 dapat digunakan kecuali vector p yang berubah menjadi :

$$\underline{p}^T = [0, 0, 0, 0 + 8, 0, 0, 0, 0]$$

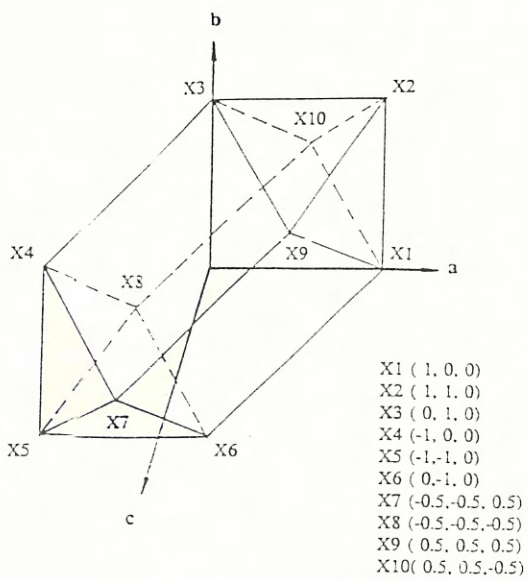
hasil yang diperoleh yaitu $\mu_c = 6$ adalah tepat sama dengan hasil perhitungan exact. Mekanisme keruntuhannya dapat dilihat pada gambar 11.

VI. Kesimpulan

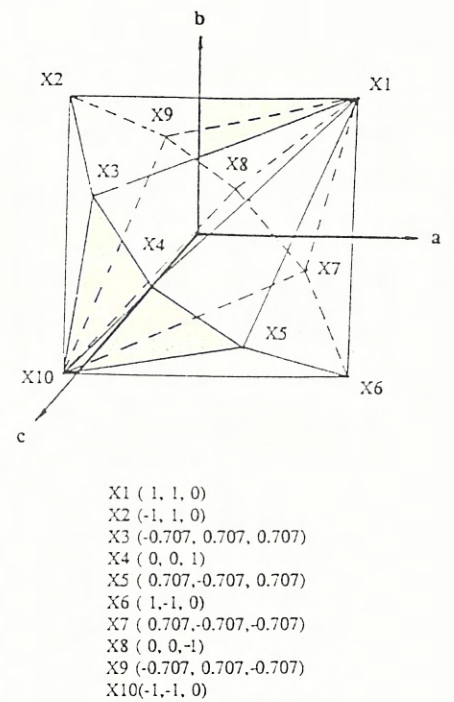
1. Perhitungan dengan pendekatan pemograman linear finite difference untuk balok memberikan hasil yang mendekati hasil exact.
2. Walaupun pendekatan ini didasarkan cara statis (lower- bound), tetapi hasilnya dapat lebih tinggi dari hasil exact, hal itu dapat dijelaskan mengingat konformitas leleh hanya diperhitungkan terjadi pada titik-titik finite difference saja, walaupun kenyataannya leleh terjadi diantara titik-titik finite difference.



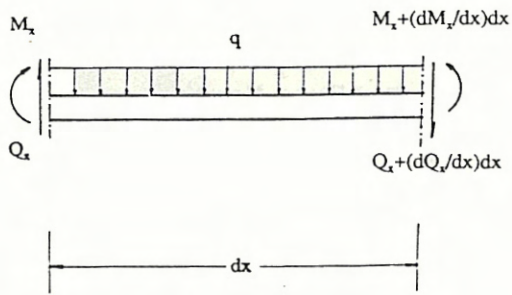
Gambar 1. Piecewise linear yield polygon



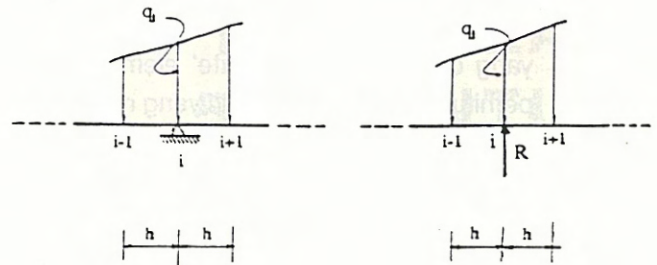
Gambar 2. Linearized Tresca yield surface.



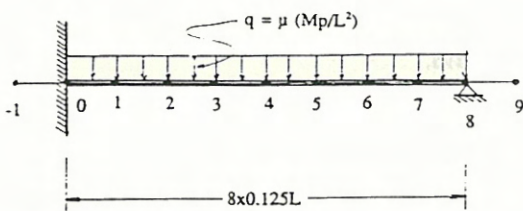
Gambar 3. Linearized Johansen yield surface.



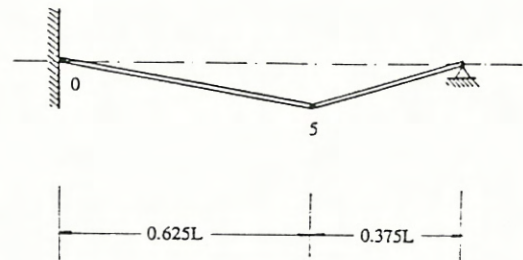
Gambar 4. Element balok.



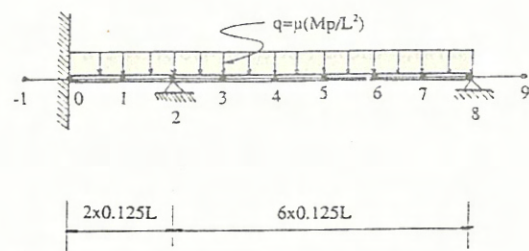
Gambar 5. Tumpuan di tengah balok.



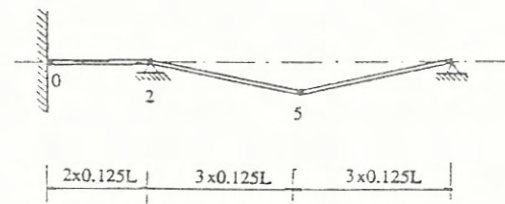
Gambar 6. Balok. (contoh 1)



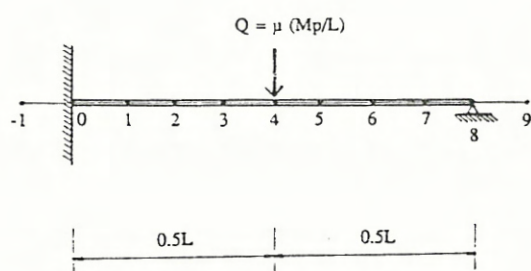
Gambar 7. Mekanisme keruntuhan balok. (contoh 1)



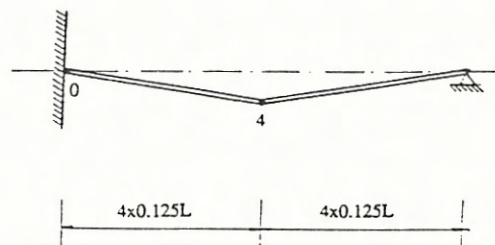
Gambar 8. balok. (contoh 2)



Gambar 9. Mekanisme keruntuhan balok. (contoh 2)



Gambar 10. balok. (contoh 3)



Gambar 11. Mekanisme keruntuhan balok. (contoh 3)

3. Dengan membuat program yang interaktif, yang dapat men- 'generate' elemen, maka perhitungan yang lebih teliti yang melibatkan lebih banyak titik-titik finite difference, dapat dilakukan dengan cepat dan efisien.

Daftar pustaka

- Charnes, A. and Greenberg, H.J. (1951). Plastic collapse and linear programming, Amer. Math. Soc., Abstract 506.
- Hadley, G. (1963). Linear Programming, Addison-Wesley, London.
- Hodge, P.G. (1954). Plastic analysis of structures, Mcgraw Hill, New York.
- Maier, G. (1970). A matrix theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes, *Meccanica*, 5, 54- 56.
- Maier, G. and Lyod Smith, D. (1986). Update to 'Mathematical programming applications to engineering plastic analysis', Appl. Mech. Update, ASME, New York.
- Maier, G. and Munro, J. (1982). Mathematical applications to engineering plastic analysis, App. Mech. Review, 5, 54-66.

Save, M.A. and Prager, W. (1990). Structural Optimization, Vol.2, Mathematical Programming, Plenum Press, New York.

Sciconic (1990) . Sciconic user guide version 2.00, SD-Scicon, Wavendon, Milton Keynes.

Sukarja, W.W. (1992) Limit Analysis of structures: A finite difference linear programming approach, Master Of Engineering thesis, UNSW, Sydney, Australia.

Zavelani-Rossi, A. (1973). A New linear programming approach to limit analysis, in *Variational Methods in Engineering*, Vol.2, Eds.C.A. Brebbia and H. Tottenham, Southampton, England.

PENULIS

Ir. Wawan Witarnawan Sukarja, Msc. ME. Lulusan sarjana Teknik Sipil ITB tahun 1980 dan Master of Science dalam bidang Teknik Jalan dari ITB tahun 1984, Master of Engineering dalam bidang Struktur dari UNSW Sydney Tahun 1992, adalah peneliti pada bidang Konstruksi Bangunan Pelengkap Jalan Pusat Litbang Jalan sejak tahun 1980 - sekarang.