

Bentuk, Gaya Dan Deformasi Kabel

Th.A. Adisoebagjo



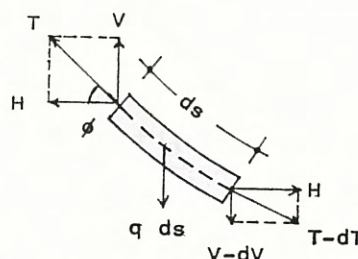
Tulisan ini pada hakekatnya menyangkut hal ikhwal kabel pada jembatan gantung. Seperti telah diketahui suatu jembatan gantung terdiri dari tiga unsur penting yaitu: angker, kabel dan pylon. Bila salah satu saja dari ketiga unsur itu gagal maka akibatnya seluruh konstruksi jembatan akan ambruk.

Ternyata unsur gelagar pengkaku bukanlah merupakan peran penentu untuk keselamatan konstruksi pemikul.

Sebelum membahasnya perlu diambil suatu ketentuan dulu bahwa kabel yang dipakai adalah kabel yang ideal dan luwes sempurna. Ini berarti bahwa kabel tidak dapat memikul momen atau gaya lintang sehingga arah gaya tarik kabel selalu merupakan garis singgung di tiap titik kabel. Gambaran masalahnya adalah demikian. Ambil suatu jembatan gantung dalam keadaan siap pakai. Pada keadaan itu pylon-nylon berdiri vertikal dan kabelnya berbentuk yang hampir-hampir menyerupai garis parabola. Jika sekarang gelagar pengkakunya ditiadakan, maka pylon-nylon akan menjadi miring ke luar dan kabel akan berubah bentuk dari garis parabola menjadi garis rantai yang disebut juga catenary. Sebaliknya dapat dikatakan bahwa pada waktu kabel dipasang bentuknya adalah catenary sedangkan ketika padanya digantungkan (montage) seksi-seksi gelagar pengkaku (yang dimulai dari tengah), bentuk kabel berubah menjadi praktis parabola. Adalah James Bernoulli yang pertama kali mengajukan bentuk catenary pada tahun 1691 dan baru seratus tahun kemudian yaitu pada tahun 1794, sehubungan dengan usul membangun jembatan gantung melintasi Neva dekat Leningrad, Nicholas Fuss mengajukan bentuk parabola.

Bentuk catenary

Apabila suatu kabel gantung hanya memikul berat sendirinya saja ataupun suatu beban yang sifatnya sama seperti berat sendiri kabel yaitu terbagi rata per satuan panjang kabel, maka bentuk keseimbangan dari kabel gantung itu adalah suatu catenary. Perhitungannya yang dikuasai oleh matematika dan didasarkan pada keadaan keseimbangan sepotong kabel dengan panjang ds adalah:



Dari gambar keseimbangan dengan mudah dapat diketahui bahwa akibat pembebanan vertikal $q ds$ besarnya komponen horisontal ($= H$) gaya kabel ($= T$) haruslah konstan sama di semua titik sepanjang kabel. Ini tidak sukar untuk diikuti karena dari keseimbangan dalam arah horisontal haruslah jumlah aljabar dari semua gaya-gaya horisontal itu sama dengan nol.

Dari keseimbangan di arah vertikal didapat persamaan:

$$V - (V - dV) - q ds = 0 \text{ didapat,} \\ dV = q ds$$

$$V = H \operatorname{tg} \phi = H \frac{dy}{dx} \text{ atau,}$$

$$dV = \frac{d}{dx} \left(H \frac{dy}{dx} \right) dx = H \frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

Hasilnya untuk keseimbangan adalah

$$\frac{q}{H} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}$$

di mana q adalah berat sendiri kabel ataupun muatan kabel per satuan panjang kabel. Selanjutnya solusi matematikanya adalah:

Misalkan: $\frac{dy}{dx} = u$ maka $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$

Substitusikan harga-harga itu dalam persamaan maka didapat:

$$\frac{q}{H} dx = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\frac{q}{H} x + C_1 = \arcsin u$$

$$u = \sin \left(\frac{qx}{H} + C_1 \right)$$

$$y = \frac{H}{q} \cos \left(\frac{qx}{H} + C_1 \right) + C_2$$

Untuk menghitung harga-harga konstanta C_1 dan C_2 maka pusat sistem sumbu dipasang pada titik terendah kabel. Dengan demikian didapat syarat-syarat batas untuk:

$$x = 0 \text{ maka } y = 0 \text{ dan } \frac{dy}{dx} = 0$$

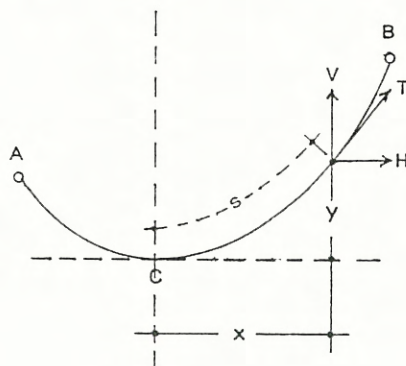
$$y = 0 = \frac{H}{q} \cos (0 + C_1) + C_2$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 = \sin (0 + C_1) + 0$$

Dari kedua syarat batas itu didapat:

$$C_1 = 0 \text{ dan } C_2 = -\frac{H}{q}$$

$$y = \frac{H}{q} \cos \left(\frac{qx}{H} \right) - \frac{H}{q}$$



Inilah bentuk matematikanya dari catenary. Bentuknya masih mentah karena dalam persamaan itu terdapat gaya H yang harus diketahui terlebih dahulu. Untuk menghitung besarnya gaya kabel T yang tentunya masih dalam fungsi H , diperlukan pengetahuan panjang kabel terlebih dahulu.

Dengan pusat sistem sumbu ada di titik terendah kabel maka didapat perhitungan-perhitungan sebagai berikut:

$$y = \frac{H}{q} \cos \left(\frac{qx}{H} \right) - \frac{H}{q}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H}{q} \cdot \frac{-q}{H} \sin \left(\frac{qx}{H} \right) = -\sin \left(\frac{qx}{H} \right)$$

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_0^x \cos \left(\frac{qx}{H} \right) dx$$

$$s = \frac{H}{q} \sin \left(\frac{qx}{H} \right)$$

Dengan data-data itu dengan mudah dapat dihitung besarnya gaya kabel T di tiap titik. Hasilnya adalah berikut ini:

$$T = \sqrt{H^2 + V^2}$$

$$V = q \cdot s = H \sin \left(\frac{qx}{H} \right)$$

$$T = H \sqrt{1 + \sin^2 \left(\frac{qx}{H} \right)} = H \cos \left(\frac{qx}{H} \right)$$

Selanjutnya dengan $y = \frac{H}{q} \cos \left(\frac{qx}{H} \right) - \frac{H}{q}$ didapat,

$$qy = H \cos \left(\frac{qx}{H} \right) - H$$

$$H \cos \left(\frac{qx}{H} \right) = T$$

$$T = H + qy$$

Hasilnya adalah suatu rumus dengan bentuk yang teramat sederhana. Jelas terlihat bahwa harga gaya T akan menjadi maksimum di titik-titik gantung sebab di situlah harga y -nya menjadi maksimum sedangkan besarnya gaya H adalah konstan. Jika diperhatikan maka rumus-

rumus untuk catenary terlihat semuanya mengandung unsur gaya H . Ini menunjukkan bahwa besarnya H haruslah ditemukan dahulu sebelum rumus dapat dipakai secara praktis. Salah satu cara untuk mencari harga H adalah dengan trial & error yang makan waktu sehingga menjadikan bentuk catenary kurang populer untuk praktek. Dapatlah dimengerti mengapa Nicholas Fuss untuk jembatannya menggunakan bentuk parabola. Usul itu ternyata cukup bagus seperti yang terlihat pada pembahasan berikut ini.

Bentuk parabola

Pada waktu montase seksi-seksi gelagar pengkaku maka pada hakekatnya kabel di samping memiliki beratnya sendiri sebesar g ds juga ditambah dengan berat sendiri gelagar pengkaku sebesar p dx. Jika yang pertama adalah berat per meter kabel maka yang kedua adalah berat per meter lari. Untuk pembebanan demikian didapat persamaan keseimbangan dalam arah vertikal sebagai berikut:

$$V - (V - dV) - g ds - p dx = 0 \quad \text{didapat,}$$

$$dV = g ds + p dx$$

$$= g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx + p dx$$

$$V = H \tan \phi = H \frac{dy}{dx}$$

$$dV = H \frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

$$\text{Alhasil: } H \frac{d^2 y}{dx^2} + g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + p = 0$$

Pemecahan persamaan diferensialnya dilakukan dengan cara numerik. Tetapi karena pada umumnya berat sendiri gelagar pengkaku p itu selalu lebih besar dari berat sendiri kabel g maka secara total dapatlah dikatakan bahwa harga $(g ds + p dx)$ tidaklah akan berbeda dengan harga $(g + p) dx = q dx$. Dengan penyederhanaan demikian persamaan diferensialnya menjadi:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} + g + p = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{g + p}{H} = \frac{q}{H}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{H} x + C_1$$

$$y = \frac{q}{2H} x^2 + C_1 x + C_2$$

Untuk mendapatkan harga-harga konstanta C_1 dan C_2 maka tempatkan pusat sistem sumbu pada titik terendah kabel. Dari syarat-syarat batas untuk:

$$x = 0 \text{ maka } y = 0 \text{ dan } \frac{dy}{dx} = 0$$

didapat harga $C_1 = 0$ dan $C_2 = 0$. Dengan demikian bentuk keseimbangan kabel yang memiliki beban penuh terbagi rata per meter lari adalah:

$$y = \frac{q}{2H} x^2 \quad \text{suatu parabola.}$$

Meskipun dalam rumus bentuk kabel terdapat gaya H tetapi nanti akan terlihat bahwa halnya tidak sesulit seperti pada catenary.

Panjang dan gaya kabel dapat dihitung sebagai berikut:

$$y = \frac{q}{2H} x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{H} x$$

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \int_0^x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{dy}{dx}\right)^6 + \dots \right] dx$$

$$= \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{qx}{H}\right)^2 - \frac{1}{40} \left(\frac{qx}{H}\right)^4 + \frac{1}{112} \left(\frac{qx}{H}\right)^6 + \dots \right] x$$

$$T = H \sec \phi = H (1 + \tan^2 \phi)^{1/2}$$

$$= H \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = H \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2}$$

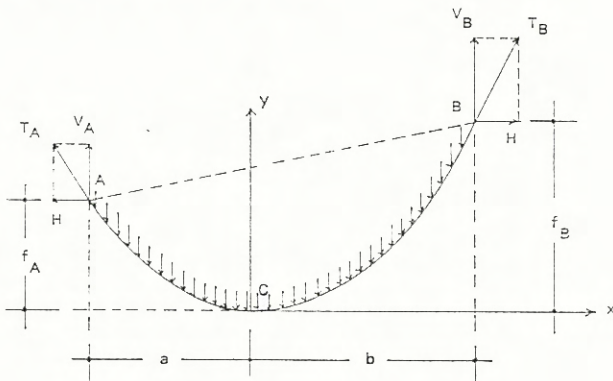
$$V = qx$$

$$T = \sqrt{H^2 + V^2}$$

$$= \sqrt{H^2 + (qx)^2}$$

Juga dari rumus gaya kabel T terlihat bahwa harganya menjadi maksimum apabila harga x mencapai harga maksimumnya. Ini berarti bahwa gaya kabel adalah terbesar pada titik gantung.

Untuk memudahkan membandingkan kedua bentuk kabel yaitu bentuk catenary dan parabola, berikut ini diberikan hasil-hasil perhitungannya dalam suatu daftar.



Bentuk catenary . . . $y = \frac{H}{q} \cos \left(\frac{qx}{H} \right) - \frac{H}{q}$

Panjang busur CA . . . $s_{CA} = \frac{H}{q} \sin \left(\frac{qa}{H} \right)$

Panjang busur CB . . . $s_{CB} = \frac{H}{q} \sin \left(\frac{qb}{H} \right)$

Gaya kabel di-A . . . $T_A = H + q \cdot f_A$

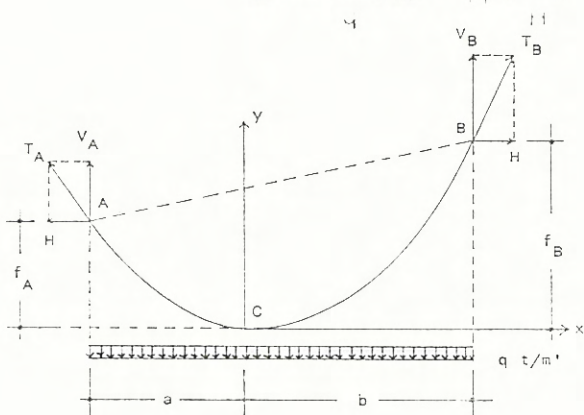
Gaya kabel di-B . . . $T_B = H + q \cdot f_B$

Reaksi vertikal di-A $V_A = H \sin \left(\frac{qa}{H} \right)$

Reaksi vertikal di-B $V_B = H \sin \left(\frac{qb}{H} \right)$

Komponen gaya kabel H $a = \frac{H}{q} \cos^{-1} \left(1 + \frac{qf_A}{H} \right)$

$b = \frac{H}{q} \cos^{-1} \left(1 + \frac{qf_B}{H} \right)$



Bentuk parabola . . . $y = \frac{q}{2H} x^2$

Panjang busur CA . . $s_{CA} = a \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{qa}{H} \right)^2 - \right.$

$\left. \frac{1}{40} \left(\frac{qa}{H} \right)^4 + \frac{1}{112} \left(\frac{qa}{H} \right)^6 \right]$

Panjang busur CB . . $s_{CB} = b \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{qb}{H} \right)^2 - \right.$

$\left. \frac{1}{40} \left(\frac{qb}{H} \right)^4 + \frac{1}{112} \left(\frac{qb}{H} \right)^6 \right]$

Gaya kabel di-A . . . $T_A = \sqrt{H^2 + (qa)^2}$

Gaya kabel di-B . . . $T_B = \sqrt{H^2 + (qb)^2}$

Reaksi vertikal di-A $V_A = q \cdot a$

Reaksi vertikal di-B $V_B = q \cdot b$

Komponen gaya ka-

bel H $H \cdot f_A = \frac{1}{2} qa^2$

. $H \cdot f_B = \frac{1}{2} qb^2$

Bentuk catenary vs parabola

Adalah jelas bahwa kabel transmisi akan mengambil bentuk catenary demikian juga kabel jembatan gantung sebelum padanya dipasang konstruksi gelagar pengkaku. Mengingat bahwa penanganan rumus-rumus catenary tidaklah sederhana maka timbul pertanyaan seberapa jauh bentuk itu dapat didekati dengan parabola yang teramat sederhana penanganannya? Untuk itu matematika memberikan jawabannya apabila fungsi catenary diuraikan menjadi bentuk deret. Didapat:

$$y = \frac{H}{q} \cos \left(\frac{qx}{H} \right) - \frac{H}{q}$$

$$y = \frac{H}{q} \left[\frac{1}{2!} \left(\frac{qx}{H} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{qx}{H} \right)^4 + \frac{1}{6!} \left(\frac{qx}{H} \right)^6 + \dots \right]$$

Apabila suku-suku dengan pangkat lebih besar dari dua diabaikan, maka akan terdapat bentuk suatu parabola, yaitu:

$$y = \frac{q}{2H} x^2$$

Dengan demikian matematika telah mengungkapkan bahwa bentuk catenary mengandung unsur parabola dan unsur itu akan dominant pada kondisi tertentu. Kondisi yang dimaksudkan, yaitu kecilnya harga sag ratio ($= n$) kabel hampir selalu dijumpai pada desain kabel transmisi. Tidaklah mengherankan jika dalam perhitungan kekuatan kabel transmisi tidak dipakai bentuk de facto catenary tetapi ditangani sebagai parabola.

Untuk kabel jembatan gantung keadaannya lain. Pada waktu kabel dipasang bentuknya adalah catenary tetapi ketika padanya digantungkan konstruksi gelagar pengkaku maka terjadi perubahan bentuk dari catenary menjadi parabola. Perubahan elastika ini membawa akibat yaitu terjadinya momen sekunder pada kabel yang mencapai harga maksimumnya di titik puncak pylon-pony. Momen sekunder itu menimbulkan tegangan lentur pada kabel tetapi untungnya bahwa harganya kecil hingga dapat diabaikan. Besarnya momen sekunder berikut tegangan yang ditimbulkan adalah:

$$M_s = EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{\text{catenary}} - EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{\text{parabola}}$$

$$\sigma_{\text{max.}} = \frac{M}{I} \frac{D}{2} \text{ di mana } D = \text{diameter kabel}$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{\text{cat.}} = \frac{q}{H} \cos \frac{qx}{H} \text{ dengan } x = \frac{1}{2} \ell$$

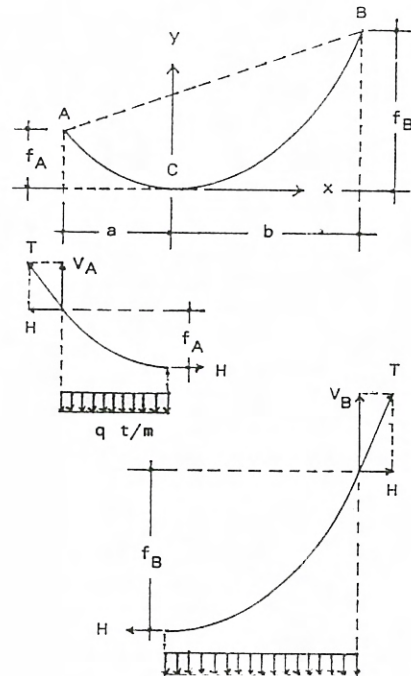
$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{\text{par.}} = \frac{q}{H}$$

$$\text{Jadi: } \sigma_{\text{max.}} = \frac{D}{2} E \left[\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{\text{cat.}} - \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{\text{par.}} \right]$$

Harga E untuk kabel diambil sedikit lebih kecil dari harga untuk bahannya sendiri yang sebesar $2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Alasannya karena pada waktu memintal kawat-kawat telah terjadi ketidak-teraturan sehingga timbul rongga-rongga yang dapat mencapai sekitar 20% padahal teoritis besarnya rongga itu hanyalah 9,3% saja. Dengan demikian harga E kabel diambil sebesar $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ataupun $2,05 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Mengingat bahwa bentuk parabola mudah ditangani karenanya lebih banyak dipakai dalam praktek maka dirasa perlu untuk lebih lanjut

membahasnya. Jika titik gantung A dan B itu berada pada ketinggian yang sama maka sudahlah jelas bahwa akan didapat suatu bentuk, catenary ataupun parabola, yang simetris. Titik terendahnya berada tepat di tengah bentang, yaitu tepat di tengah jarak horisontal antara kedua titik gantung A dan B. Sebaliknya jika letak kedua titik gantung itu tidak pada ketinggian yang sama maka sudah barang tentu letak titik terendah tidak di tengah bentang.



Titik terendah kabel

Salah satu cirinya adalah di titik itu gaya kabel T besarnya sama dengan komponen horisontalnya H. Jadi didapat $T = H$. Ciri demikian dipakai untuk menemukan lokasi titik terendah. Untuk itu potonglah kabel tepat di titik terendahnya. Maka didapat keseimbangan dari masing-masing bagian:

$$M_A = \frac{1}{2} qa^2 - H \cdot f_A = 0$$

$$M_B = \frac{1}{2} qb^2 - H \cdot f_B = 0$$

Hasil dari kedua persamaan adalah:

$$\frac{f_A}{f_B} = \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

Mengingat bahwa f_A , f_B dan $(a+b) = \ell$ adalah harga-harga yang diketahui dari desain maka dengan mudah dapat ditetapkan besarnya a dan b berikut gaya H . Dalam hal titik gantung A dan B letaknya sama tinggi maka didapat $f_A = f_B = f$ dan $a = b = \frac{1}{2}\ell$. Substitusikan harga-harga itu dalam rumus persamaan gaya H maka didapat:

$$H \cdot f = \frac{1}{2} q \left(\frac{1}{2} \ell\right)^2$$

$$H = \frac{q \ell^2}{8f}$$

Dengan harga H itu maka persamaan parabola:

$$y = \frac{q}{2H} x^2 \text{ menjadi:}$$

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x^2$$

dan bila titik gantung merupakan pusat sistem sumbu, persamaan itu berubah dengan bentuk:

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x (\ell - x)$$

Untuk kasus catenary perhitungan besarnya a dan b didapat dengan menjumlah kedua harga itu seperti yang ada pada halaman 4

$$(a+b) \frac{q}{H} = \cos^{-1} \left(1 + \frac{q f_A}{H}\right) + \cos^{-1} \left(1 + \frac{q f_B}{H}\right)$$

Dengan cara coba-coba harga H dapat ditemukan untuk kemudian disusul dengan besarnya a dan b . Cara lain untuk menghitung harga pendekatan H adalah dengan menyamakan panjang catenary dengan panjang parabola. Untuk keadaan di mana kedua titik gantung A dan B letaknya sama tinggi didapat persamaan (lihat rumus panjang busur s_{CA} dan s_{CB} pada halaman 4 :

$$L = \frac{2H}{q} \sin \frac{q \ell}{2H} = \ell \left(1 + \frac{8}{3} n^2 - \frac{32}{5} n^4 + \frac{257}{7} n^6\right)$$

di mana $n = \frac{f}{\ell}$ yang disebut sag ratio kabel.

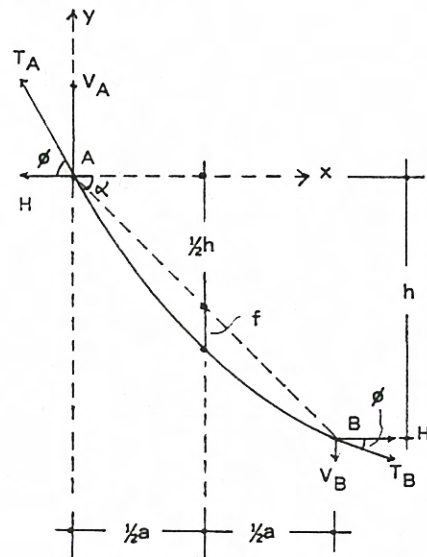
Dalam persamaan tersebut panjang parabola L yang dipakai sebetulnya hanyalah harga pendekatan saja. Panjang eksaknya adalah:

$$L = \frac{1}{2} \ell (1 + 16n^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\ell}{8n} \ln |4n + (1 + 16n^2)^{\frac{1}{2}}|$$

Beda antara kedua panjang itu praktis nihil untuk harga-harga n yang kecil. Dalam praktek n berkisar antara 1 : 8 dan 1 : 12.

n	Harga L : ℓ	
	eksak	pendekatan
0,05	1,00663	1,00663
0,075	1,01480	1,01480
0,1	1,02606	1,02603
0,125	1,04023	1,04024
0,15	1,05712	1,05717
0,175	1,07652	1,07672
0,2	1,09823	1,09877

Tidak selalu suatu bentuk parabola mempunyai titik terendah C , yaitu titik di mana gaya kabel $T = H$. Kasus demikian dijumpai misalnya pada jembatan gantung yang gelagar tepinya digantungkan pada kabel. Hal yang sama terdapat juga pada konstruksi guyed towers.



Dengan menempatkan pusat sistem sumbu pada titik gantung atas maka perhitungan bentuk parabola adalah:

$$y = \frac{q}{2H} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{H} x + C_1$$

Dengan syarat-syarat batas:

$$x = 0 \text{ maka } y = 0$$

$$x = a \text{ maka } y = -h$$

didapat $C_2 = 0$

$$C_1 = - \left| \frac{qa}{2H} + \frac{h}{a} \right|$$

Persamaan parabola menjadi,

$$y = \frac{q}{2H} x^2 - \left| \frac{qa}{2H} + \frac{h}{a} \right| x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H} - \left| \frac{qa}{2H} + \frac{h}{a} \right|$$

Besarnya gaya kabel

Untuk menghitung gaya kabel T perlu diketahui besarnya gaya H yang merupakan komponen horisontalnya. Perhitungannya demikian:

Samakan harga $\frac{dy}{dx}$ dengan $\tan \alpha = -\frac{h}{a}$ maka hasilnya adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H} - \left| \frac{qa}{2H} + \frac{h}{a} \right| = -\frac{h}{a}$$

Didapat $x = \frac{1}{2}a$ dan $y = -(\frac{1}{2}h + f)$. Substitusikan harga $x = \frac{1}{2}a$ ini ke dalam persamaan parabola maka:

$$y = \frac{q}{2H} (\frac{1}{2}a)^2 - \left| \frac{qa}{2H} + \frac{h}{a} \right| (\frac{1}{2}a) = -(\frac{1}{2}h + f)$$

$$\text{Jadi, } f = \frac{qa^2}{8H} \text{ atau } H = \frac{qa^2}{8f}$$

Bentuk rumus untuk H ternyata sama dengan bila keadaan parabola simetris. Perlu diketahui bahwa harga f selalu diukur vertikal dari titik tengah bentang. Selanjutnya mudahlah untuk menghitung gaya kabel di masing-masing titik gantung.

Untuk titik A, $x = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \tan \phi_A = - \left| \frac{qa}{2H} + \frac{h}{a} \right|$$

$$V_A = H \tan \phi_A$$

$$T_A = H \sqrt{1 + \tan^2 \phi_A}$$

$$H = \frac{qa^2}{8f}$$

Untuk titik B, $x = a$.

$$\frac{dy}{dx} = \tan \phi_B = \frac{qa}{2H} - \frac{h}{a}$$

$$V_B = H \tan \phi_B$$

$$T_B = H \sqrt{1 + \tan^2 \phi_B}$$

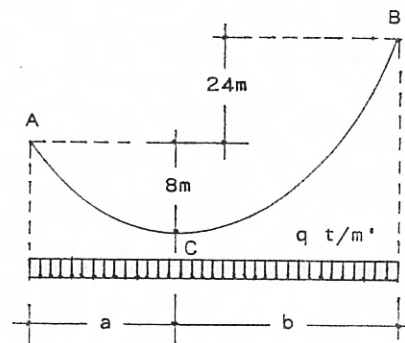
$$H = \frac{qa^2}{8f}$$

Panjang kabel

Dalam praktek umumnya dipakai rumus pendekatan seperti yang ada dalam buku: Modern Framed Structures Part II, 10th Ed. oleh Johnson, Bryan dan Turneaure, yaitu:

$$L = a \left| \sec \alpha + \frac{8f^2}{3a^2 \sec^3 \alpha} \right|$$

Contoh:



Suatu kabel yang digantungkan pada titik A dan B yang letaknya tidak sama tinggi, memikul beban total termasuk berat sendiri kabel (kecil) penuh terbagi rata $q = 1$ t/m'. Jarak horisontal antara kedua titik gantung itu adalah 240 meter. Titik B berada 24 meter di atas ketinggian titik A yang berada 8 meter di atas ketinggian titik terendah C dari kabel. Ditanya letak titik terendah C, besarnya gaya di titik gantungan dan panjang kabel.

Titik terendah kabel:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{f_A}{f_B} = \frac{8 \text{ m}}{(8+24) \text{ m}} = \frac{1}{4}$$

$$a + b = 240 \text{ meter}$$

$$a = 80 \text{ meter}$$

$$b = 160 \text{ meter}$$

Gaya kabel:

$$H = \frac{\frac{1}{2}qa^2}{f_A} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1.80^2}{8} = 400 \text{ ton}$$

$$H = \frac{\frac{1}{2}qb^2}{f_B} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1.160^2}{32} = 400 \text{ ton}$$

$$V_A = q \cdot a = 1.80 = 80 \text{ ton}$$

$$V_B = q \cdot b = 1.160 = 160 \text{ ton}$$

$$T_A = \sqrt{H^2 + V_A^2} = 407,920 \text{ ton}$$

$$T_B = \sqrt{H^2 + V_B^2} = 430,810 \text{ ton}$$

Panjang kabel:

$$n_{CA} = \frac{f_A}{2a} = \frac{8}{2.80} = 0,05$$

$$s_{CA} = 1,00663 \cdot a = 80,530 \text{ meter}$$

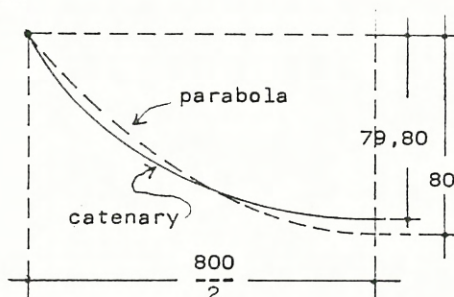
$$n_{CB} = \frac{f_B}{2b} = \frac{32}{2.160} = 0,1$$

$$s_{CB} = 1,02606 \cdot b = 164,170 \text{ meter}$$

$$L = s_{CA} + s_{CB} = 244,700 \text{ meter}$$

Koefisien 1,00663 dan 1,02606 diambil dari tabel pada halaman 6 yaitu masing-masing untuk $n = 0,05$ dan $0,1$.

Contoh:



Suatu kabel dengan diameter 450 mm dan beratnya $g = 1 \text{ t/m}$ kabel jadi bukan per meter lari, dipasang melalui puncak pylon A dan B yang sama tinggi letaknya.

Bentang AB adalah 800 meter. Ditanya besarnya tegangan lentur yang ditimbulkan pada kabel di puncak pylon oleh momen sekunder akibat peralihan bentuk dari catenary menjadi parabola.

Seperti diketahui pada waktu kabel terpasang dan belum digantungkan konstruksi gelagar pengkaku bentuknya adalah catenary:

$$y = \frac{H}{q} \cos\left(\frac{qx}{H}\right) - \frac{H}{q}$$

$$y = \frac{H}{q} \left[\frac{1}{2!} \left(\frac{qx}{H}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{qx}{H}\right)^4 + \frac{1}{6!} \left(\frac{qx}{H}\right)^6 + \dots \right]$$

Gaya H dapat dihitung dengan menggunakan rumus pada halaman 4 dengan substitusi $a = b = \frac{1}{2} \ell$ dan $f_A = f_B = f$. Didapat bentuk:

$$\frac{q\ell}{2H} = \cos^{-1} \left(1 + \frac{qf}{H} \right)$$

Jelas terlihat bahwa perlu fantasi untuk memecahkan rumus-rumus.

Mengingat bahwa harga sag ratio kabel sudah ditetapkan yaitu $n = 0,1$, jadi $f = 0,1.800 \text{ meter} = 80 \text{ m}$, suatu harga yang cukup kecil, maka dari bentuk deret untuk catenary (lihat halaman 4) terungkap bahwa tanpa membuat kesalahan yang berarti, catenary itu boleh didekati sebagai parabola. Dengan bentuk parabola besarnya gaya H dapat dengan mudah ditemukan yaitu:

$$H = \frac{q\ell^2}{8f} = \frac{1.800^2}{8.80} = 1000 \text{ ton}$$

Tentu saja harga itu tidak sepenuhnya betul. Suatu cara pendekatan lain untuk menghitung gaya H dari catenary adalah menyamakan panjangnya dengan panjang parabola. Didapat dari halaman 6 untuk $n = 0,1$ panjang parabola $L = 1,02606 \cdot 800 \text{ meter} = 820,848 \text{ meter}$ sedangkan panjang catenary adalah:

$$L = \frac{2H}{q} \sin \frac{q\ell}{2H} = \frac{2H}{1} \sin \frac{1.800}{2H}$$

Persamaannya menjadi $2H \sin \frac{400}{H} = 820,848$.

Dengan cara coba-coba didapat $H = 1015,5$ ton atau 1,55% lebih besar. Untuk mengetahui letak dari titik terendah kabel, substitusikan ke dalam persamaan catenary harga $x = \frac{1}{2} \ell = \frac{1}{2} \cdot 800$ meter maka didapat $f = 79,80$ meter atau 20 cm lebih tinggi dari bentuk parabola. Besarnya tegangan lentur di kabel akibat timbulnya momen sekunder pada puncak pylon dihitung dengan rumus-rumus di halaman 5. Dengan mengambil harga $E = 2,05 \cdot 10^6$ kg/cm² untuk kabel, hasilnya adalah:

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{\text{par.}} = \frac{q}{H} = \frac{1 \text{ t/m}'}{1000 \text{ t}} = 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{\text{cat.}} = \frac{q}{H} \cos \frac{q\ell}{2H} = \frac{1 \text{ t/m}'}{1015,5 \text{ t}} \cos$$

$$\frac{1 \text{ t/m}' \cdot 800 \text{ m}}{2 \cdot 1015,5 \text{ t}}$$

$$= 1,062 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

$$\sigma = \frac{45 \text{ cm}}{2} \cdot 2,05 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 (0,062 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1})$$

$$= 28,6 \text{ kg/cm}^2.$$

Suatu harga yang kecil mengingat tiap kawat (dari ϕ 5 mm) yang dipasang paralel itu mempunyai kekuatan tarik sebesar: 12 t/cm² – 18 t/cm² dengan faktor keamanan masing-masing 1,7 dan 2,0. Dengan demikian pengaruh momen sekunder yang secara tetap ada pada kabel dapat diabaikan.

Seluruh pembahasan di muka didasarkan pada anggapan bahwa kabel tidak mengalami deformasi meskipun padanya bekerja gaya-gaya. Demikian pula bahwa titik-titik gantung kabel merupakan titik-titik yang fixed dan bukan titik-titik elastis seperti halnya puncak-puncak pylon. Jelaslah bahwa harus diadakan koreksi-koreksi. Jika memang titik-titik gantung itu fixed letaknya maka akibat pembebanan kabel akan memanjang elastis sedangkan akibat perubahan suhu kabel akan memanjang ataupun memendek thermis. Jadi panjang kabel yang semula adalah L akan

berubah menjadi L' .

Perubahan panjang kabel L mempunyai dampak pada besarnya sag kabel f yang pada gilirannya akan mempengaruhi besarnya gaya kabel T melalui komponen horisontalnya H . Pembahasan selanjutnya didasarkan pada kabel dengan bentuk parabola yang simetris. Perhatikan rumus-rumus berikut ini:

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x^2$$

$$L = \ell \left(1 + \frac{8}{3} n^2 - \frac{32}{5} n^4 + \frac{257}{7} n^6\right)$$

$$H = \frac{q \ell^2}{8f}$$

Pertanyaan yang timbul adalah, jika berhubung satu dua hal panjang kabel yang semula L berubah dengan ΔL sedangkan titik-titik gantungnya tidak berubah tempat, berapakah besarnya perubahan yang terjadi pada sag kabel yang semula adalah f ? Demikian pula jika sag kabel yang semula f berubah dengan Δf berapakah perubahan yang terjadi pada gaya kabel T ? Pada hakekatnya masalahnya merupakan suatu persoalan matematika. Oleh karena itu jika perubahan-perubahan yang terjadi dapat dianggap cukup kecil maka matematika memberikan jawaban sebagai berikut:

$$\Delta L = \frac{\delta L}{\delta f} \cdot \Delta f$$

$$\Delta H = \frac{\delta H}{\delta f} \cdot \Delta f$$

Dari rumus-rumus untuk y , L dan H seperti tersebut diatas dan dengan bentang ℓ yang konstant karena titik-titik gantung tidak berubah tempat, didapat harga-harga:

$$\frac{\delta L}{\delta f} = \left(\frac{16}{3} n - \frac{128}{5} n^3 + \frac{1536}{7} n^5 \right)$$

$$\frac{\delta L}{\delta f} = - \frac{q \ell^2}{8f^2} = - \frac{H}{f}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8f}{\ell^2} x = \text{tg } \phi$$

Besarnya perubahan panjang kabel ΔL akibat

naik turunnya suhu adalah:

$$\Delta L = \lambda t L$$

di mana λ merupakan koefisien pemuaian linear kabel. Sebagai akibat pembebanan kabel akan memanjang sebesar:

$$\begin{aligned}\Delta L &= \int \frac{T ds}{EF} \\ &= \int \frac{(H \sec \phi) (dx \sec \phi)}{EF} \\ &= \frac{H}{EF} \int (1 + \tan^2 \phi) dx \\ \Delta L &= \frac{2H}{EF} \int_0^{\frac{1}{2}l} (1 + \frac{64f^2}{l^4} x^2) dx \\ &= \frac{Hl}{EF} (1 + \frac{16}{3} n^2)\end{aligned}$$

Bagaimana sekarang jika titik-titik gantung berpindah tempat hingga bentang l berubah besarnya? Dengan anggapan bahwa perpindahan itu harus dianggap kecil sehingga lintasan perpindahannya adalah horisontal, pertanyaannya menjadi, jika berhubung satu dua hal bentang kabel yang semula sama dengan l berubah dengan Δl , berapa kah besarnya perubahan yang terjadi pada sag kabel yang semula adalah f dan apa pengaruhnya terhadap gaya kabel T ? Matematika dengan perhitungan partial differential memberikan jawaban sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Delta L &= \frac{\delta L}{\delta f} \cdot \Delta f \\ \Delta L &= \frac{\delta L}{\delta l} \cdot \Delta l \\ \frac{\delta L}{\delta f} &= (\frac{16}{3} n - \frac{128}{5} n^3 + \frac{1536}{7} n^5) \\ \frac{\delta L}{\delta l} &= (1 - \frac{8}{3} n^2 + \frac{96}{5} n^4 - \frac{1280}{7} n^6)\end{aligned}$$

Samakan kedua persamaan ΔL itu maka didapat suatu rumus yang mengatur hubungan perubahan-perubahan antara kedua variable itu sebagai berikut:

$$\Delta l = \frac{16 n(5 - 24 n^2 + 205 n^4)}{(15 - 40 n^2 + 288 n^4 - 2743 n^6)} \cdot \Delta f$$

Kasus demikian dijumpai pada jembatan gantung. Akibat langsingnya pylon-tylon maka puncak-puncaknya akan melentur ke dalam sehingga bentang horisontalnya besarnya berubah.

DAFTAR PUSTAKA

- Steinman D.B., "A Practical Treatise on Suspension Bridge". John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Troitsky M S., "Cable-Stayed Bridges". Crosby Lockwood Staples, London.
- Frederick S. Merrit., "Structural Steel Designers", Handbook. Mc Graw-Hill Book Company New York.
- Jong de H. ir., Hangbruggen "Technische Hogeschool Delft Afdeling der Civiele Techniek". November 1969.

Penulis:

Ir. Th. A. Adisoebagjo adalah dosen pada Jurusan Teknik Sipil Institut Teknologi Bandung dalam bidang Konstruksi Baja dan Konstruksi Kayu.